

Задачи 1

Коммутативная алгебра: абелевы группы

Теоретический материал: файл AT1n.pdf; гл. 9, § 1 из [ВИН]; § 7, 8 из [КМ].

Задачи:

1. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических групп факторгруппу F/H , где F — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3 , а H — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} y_1 = 12x_1 - 2x_2 + 4x_3, \\ y_2 = 6x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 8x_1 - 4x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

2. а) Какие из следующих абелевых групп порядка $432 = 2^4 \cdot 3^3$ изоморфны между собой:

$$\mathbb{Z}_{72} \oplus \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{18};$$

б) сколько всего имеется различных (с точностью до изоморфизма) абелевых групп этого порядка?

3*. Докажите, что нормальная форма Смита определяется исходной целочисленной матрицей однозначно.

Указание. Решите и используйте задачу 3, гл. 9, § 1 из [ВИН].