Задачи 20

Линейные представления: конечномерные ассоциативные алгебры

Теоретический материал: файл AT20n.pdf; гл. 11, § 3 из [ВИН].

Задачи для домашней работы:

1. Доказать, что факторалгебра $\mathbb{C}/(f)$ полупроста тогда и только тогда, когда многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ не имеет кратных корней.

2. Доказать, что

а) простая коммутативная (конечномерная и ассоциативная) алгебра с единицей над полем F либо одномерна и имеет нулевое умножение, либо изоморфна некоторому расширению L поля F, а в случае алгебраически замкнутого поля F — самому полю F;

б) полупростая коммутативная (конечномерная и ассоциативная) алгебра с единицей над полем F изоморфна прямой сумме расширений поля F, а в случае алгебраически замкнутого поля F — прямой сумме $F^{\oplus s}$.

3*. Элемент кольца e называется идемпотентом, если $e^2 = e$. Идемпотент e примитивен, если его нельзя разложить в сумму двух ненулевых идемпотентов. Пусть A — полупростая (конечномерная и ассоциативная) алгебра с единицей 1 над алгебраически замкнутым полем F. Доказать, что

а) существует однозначно определенное разложение $1 = e_1 + \ldots + e_s$ единицы в сумму примитивных идемпотентов $e_1, \ldots, e_s$, лежащих в центре $Z(A)$ алгебры A;

б) если все идемпотенты алгебры A лежат в $Z(A)$, то $A = F^{\oplus s}$ — прямая сумма s копий поля F.