Задачи 2

Коммутативная алгебра: идеалы и гомоморфизмы колец

Теоретический материал: файл AT2n.pdf, гл. 9, § 2 из [ВИН].

Задачи:

1. Найти все гомоморфизмы колец:
а) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, б) $\mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_2)$.

2. Пусть $M = M_n(R)$ — кольцо матриц размерности n над кольцом R. Доказать, что

а) если R — поле, то в M нет ненулевых собственных (двусторонних) идеалов;

б) если R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, то любой идеал в M — это в точности множество матриц, элементы которых принадлежат фиксированному идеалу кольца R.

3*. Докажите *китайскую теорему об остатках*. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Если $I_1, \dots, I_n$ — идеалы в A и $A = I_i + I_j$ для любых $i \neq j$, то для любых $x_1, \dots, x_n \in A$ существует такой элемент $x \in A$, то $x - x_k \in I_k$, $k = 1, \dots, n$.

Указание. Сначала разберите случай $n = 2$, а потом воспользуйтесь индукцией.