

## Задачи 3

### Коммутативная алгебра: евклидовы кольца и кольца главных идеалов

Теоретический материал: файл АТЗп.pdf, гл. 3, § 5 и гл. 9, § 2 из [ВИН].

#### Задачи:

1. В кольце  $\mathbb{Z}[i]$  целых гауссовых чисел с нормой  $N(a + bi) = a^2 + b^2$  найти  
а) остаток и частное от деления  $40 + i$  на  $3 - i$ ,   б) НОД( $20 + 9i, 11 + 2i$ ).
2. Пусть  $A$  — кольцо главных идеалов, а  $Q$  — его поле частных. Доказать, что любое подкольцо  $R$  в  $Q$ , которое включает в себя кольцо  $A$ , само будет кольцом главных идеалов.
- 3\*. Доказать, что простые элементы кольца  $\mathbb{Z}[i]$  — это (с точностью до ассоциированности) простые натуральные числа вида  $4k + 3$  и числа вида  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $a^2 + b^2$  — это либо 2, либо простое число вида  $4k + 1$ .