Задачи 4

Коммутативная алгебра: модули над кольцами главных идеалов

Теоретический материал: файл AT4n.pdf, гл. 9, § 3 из [ВИН].

Задачи:

1. Модуль называется *простым*, если он не имеет собственных ненулевых подмодулей.

а) Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F. Доказать, что V — простой модуль над кольцом $\mathcal{L}(V)$ линейных преобразований пространства V.

б) Привести пример абелевой группы M, которая не является простым модулем над кольцом $\mathrm{End}(M)$ своих эндоморфизмов.

2. Пусть A — целостное кольцо. Доказать, что регулярный A-модуль A изоморфен любому своему ненулевому подмодулю тогда и только тогда, когда A — кольцо главных идеалов.

3*. Решить задачи 1-3 из § 3 гл. 9 из [ВИН].