Задачи 5

Коммутативная алгебра: нётеровы кольца

Теоретический материал: файл AT5n.pdf, гл. 9, § 4,6 из [ВИН].

Задачи:

1. Доказать *вторую теорему о гомоморфизмах* для произвольных колец и модулей:

а) если I — идеал, а B — подкольцо кольца A, то $J = B \cap I \trianglelefteq B$ и $(B+I)/I \simeq B/J$, в частности, B/J изоморфно подкольцу факторкольца A/I;

б) если K и N — подмодули A-модуля M, то $(K+N)/N \simeq K/(K \cap N)$, в частности, A-модуль $K/(K \cap N)$ изоморфен подмодулю фактормодуля M/N.

Далее в задачах A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

2. Верны ли следующие утверждения:

а) если $A[x]$ нётерово, то A нётерово;

б) если A не имеет делителей нуля и $A[x]$ — кольцо главных идеалов, то A — поле.

3*. Доказать (без предположения о нётеровости A), что в A найдется максимальный идеал.