

## Задачи 7

### Коммутативная алгебра: базисы Грёбнера – Ширшова

Теоретический материал: файл AT7n.pdf, гл. 7, § 3, 4 из [ПСШ], § 4.3-4.7, 5.1-5.3 и гл. 6 из [AP].

Всюду  $F$  — поле.

#### Задачи:

1. а) Пусть  $n$  — натуральное число,  $I$  — счётное множество, а  $\mathcal{A} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$  — семейство упорядоченных  $n$ -ок неотрицательных целых чисел. Доказать, что не существует бесконечной цепочки строго убывающих относительно лексикографического порядка элементов из  $\mathcal{A}$ . *Указание.* Индукция по  $n$ .

б) Доказать предложение 1 из лекции (см. файл AT7) об эквивалентности двух определений базиса Грёбнера идеала кольца  $F[x_1, \dots, x_n]$ . *Указание.* Воспользоваться утверждением п. а).

2. Найти базис Грёбнера идеала  $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  относительно порядка  $x > y > z$  и редуцировать его, если

а)  $I = (x^2 - 1, xy - y, xz - z);$

б)  $I = (x^2 - 1, xy - y, xz + z);$

в)  $I = (xy^2 - z - z^2, x^2y - y, y^2 - z^2).$

3\*. Доказать теорему 8 из лекции (файл AT7n). Используя утверждение этой теоремы, указать алгоритм, определяющий лежит ли многочлен  $f$  в радикале идеала  $(f_1, \dots, f_m) \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ . Используя полученный алгоритм, указать алгоритм, устанавливающий эквивалентность двух систем алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.