

Задачи 8

Коммутативная алгебра: факториальные кольца

Теоретический материал: файл AT8n.pdf, гл. 9, § 2, 7 из [ВИН].

Задачи:

1. Разложить на простые множители

а) $x^2 + y^2$ в $\mathbb{C}[x, y]$, б) числа 2, 3, 5 в $Z[i]$.

2. Доказать, что в факториальном кольце радикал главного идеала — главный идеал.

3*. а) Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n) - 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $Z[x]$.

б) Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n) + 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $Z[x]$ при $n > 4$. Найти возможные разложения для f на простые множители при $n \leq 4$.