Программа специального курса «Алгебра – 2»

Лектор: проф. Васильев А.В.

2022–23 учебный год

1 семестр

1. Коммутативная алгебра

Свободные абелевы группы и их подгруппы (КМ, § 7), теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (КМ, § 8; ВИН гл. 9, § 1). Гомоморфизмы колец и алгебр, прямое произведение колец, кольцо главных идеалов и его свойства (ВИН, гл. 9, § 2). Модули над кольцами, гомоморфизмы модулей, циклические модули, строение конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов (ВИН, гл. 9, § 3; КОС3, гл. 4, § 1.1). Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе, нильпотентный радикал (ВИН, гл. 9, § 4). Расширения колец: целые, конечные, целозамкнутые [ВИН, гл. 9, § 5]. Конечно порожденные алгберы: базис трансцендентности, лемма Нётер о нормализации (ВИН, гл. 9, § 6). Системы алгебраических уравнений, аффинное алгебраическое многообразие, идеал системы, идеал многообразия, эквивалентные системы, радикал идеала, теорема Гильберта о нулях (ПСШ, гл. 7, § 1, 2; ВИН гл. 9, § 6). Задача вхождения и базис Грёбнера идеала, базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений (ПСШ, гл. 7, § 3, 4). Алгоритм Бухбергера и его обоснование, редуцированный базис Грёбнера (АР, гл. 4, § 5,6). Факториальные кольца, факториальность кольца многочленов над полем, примеры нефакториальных колец (ВИН гл. 9, § 7). Дополнительно см. также АР, гл. 1–6; КОС3, гл. 2, § 3, гл. 4, § 1–3; ЧБГ.

2. Теория групп

Свободные группы и их матричное представление, задание группы порождающими элементами и определяющими соотношениями, подгруппы свободных групп и теорема Нильсена – Шрайера (КМ, § 14). Коммутант группы, разрешимые и нильпотентные группы (ВИН, гл. 10, § 2). Конечные группы: композиционный ряд и теорема Жордана – Гёльдера, теоремы Силова (КМ, § 4.4, § 11; ВИН, гл. 10, § 4). Группы подстановок: подстановочный изоморфизм, транзитивность и представления подстановок смежными классами, системы импримитивности (КМ, § 12.3) и сплетение, вложение Фробениуса (КМ, § 6.2), лемма Ивасавы (КМ, § 13.2), простота группы A_n при $n \geq 5$ (КМ, § 13.1; ВИН гл. 10, § 5). Простые матричные группы: теорема Жордана – Диксона (КМ, § 13.2) и простота группы SO(3) (ВИН гл. 10, § 5). Дополнительно см. также БГП, гл. 1, § 7–15 и гл. 2, § 1–9; КОС3, гл. 2, § 1–3; Ш, § 16.

2 семестр

3. Полилинейная алгебра

Понятие полилинейного отображения векторных пространств. Тензорное произведение векторных пространств: определение, существование и единственность, основной

принцип тензорной алгебры (файл AN-81; ВИН, гл. 8, § 1), другие подходы к определению тензорного произведения пространств (КосМ, ч. 4, § 1). Пространство тензоров: валентность, ковариантные и контравариантные тензоры. Операции на тензорах: тензорное произведение и свертка. Координаты тензора: замена координат при переходе к новому базису, координаты тензорного произведения и свертки, метрический тензор, спуск и подъем индекса (файл AN-81; ВИН, гл. 8, § 1,2; КосМ ч. 4, § 4; Кос2, гл. 6, § 1). Тензорная алгебра: определение и универсальное свойство, тензорная алгебра как алгебра многочленов от некоммутирующих переменных, тензор структурных констант произвольной алгебры (файл AN-83; ВИН, гл. 8, § 2). Симметрические и кососимметрические полилинейные отображения. Симметрическая и внешняя степень векторного пространства и их универсальность. Симметрическая алгебра и внешняя алгебра (алгебра Грассмана) и их свойства. Симметрические и кососимметрические тензоры, операции симметрирования и альтернирования. Теорема о соответствии между p-мерными подпространствами пространства и разложимыми p-векторами его алгебры Грассмана (файл AN-91.pdf; ВИН, гл. 11, § 1; Кос2, гл. 3, § 1). Дополнительно см. также КосМ, ч. 4; Кос2, гл. 6; Ш, § 8.

4. Линейные представления и ассоциативные алгебры

Понятие линейного представления: представление группы, кольца, алгебры, морфизм и эквивалентность представлений. Инвариантные представления: подпредставление и факторпредставление, приводимость и разложимость представлений. Неприводимые представления: лемма Шура и ее следствия (пропорциональность неприводимых представлений и одномерность неприводимого представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем). Сумма и тензорное произведение представлений, изотипные компоненты представления, лемма Бернсайда (файл AN-91; ВИН, гл. 11, § 1). Полная приводимость линейных представлений: эквивалентные определения, лемма о неподвижной точке и теорема Машке для конечных групп (файл AN-91; ВИН, гл. 11, § 1,2). Понятие топологической группы, компактные топологические группы, полная приводимость вещественных и комплексных представлений компактной группы (ВИН, гл. 11, § 2). Конечномерные ассоциативные алгебры и их неприводимые представления: нильпотентный радикал, полупростая и простая алгебры, критерий полупростоты, строение простой алгебры и ее нетривиальное неприводимое представление, структура полупростой алгебры и ее неприводимых представлений над алгебраически замкнутым полем (ВИН, гл. 11, § 3). Групповые алгебры и линейные представления конечных групп: полупростота групповой алгебры над полем, характеристика которого не делит порядок группы, теорема о числе и размерностях неприводимых представлений, понятие характера представления, неприводимые характеры и их свойства, примеры (ВИН, гл. 11, § 4). Алгебры с делением: теоремы Фробениуса и Веддерберна (ВИН, гл. 11, § 6). Дополнительно см. также Кос3, гл. 3 и гл. 4, § 4; Gor, Ch. 3, § 1-3, Ch. 4, § 1,2; Ш, § 17.

Основная литература

[ВЛМ] А. В. Васильев, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: конспект лекций. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2020.

[ВИН] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.

[КМ] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.

[КОС1] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КОС2] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КОС3] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КЗ] Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Дополнительная литература

[АР] И. В. Аржанцев. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. М. : МЦНМО, 2003.

[МГУ] И. В. Аржанцев, В. В. Батырев, Е. И. Бунина и др. Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ. М.: МЦНМО, 2012.

[БЛМ] В. Г. Бардаков. Лекции по алгебре Ю. И. Мерзлякова: Учебное пособие. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2012.

[БГП] О. В. Богопольский. Введение в теорию групп. — Москва–Ижевск: Ин-т комп. технологий, 2002.

[ВДВ] Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. — М.: Наука, 1976.

[ВМ] А. В. Васильев, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: Конспект лекций. Ч. 1. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2010.

[ЖЧ] В. Н. Желябин, В. А. Чуркин. Линейные преобразования евклидовых пространств. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[КОС] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

[КосМ] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. 4-е изд. — М.: Лань, 2008.

[КУР] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.

[Л] С. Ленг. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[М] А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.

[ПСШ] А. П. Пожидаев, С. Р. Сверчков, И. П. Шестаков. Лекции по алгебре: Учебное пособие для студентов 1 курса ММФ НГУ. Ч. 1,2. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2011.

[Пр] И. В. Проскуряков (ред.). Сборник задач по линейной алгебре, – 9-е изд. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2005.

[Ф] Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

[ФС] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977.

[Ч] В. А. Чуркин. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1991.

[ЧЗ] В. А. Чуркин. Задания по алгебре для 1 курса ММФ. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2007.

[ЧП] В. А. Чуркин. Задача о подобии для линейных операторов. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[ЧБГ] В. А. Чуркин. Системы полиномиальных уравнений, идеалы и их базисы делители. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[Ш] И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1986, Т. 11, 5–279.

[ШР] И. Р. Шафаревич, А. О. Ремезов. Линейная алгебра и геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[Gor] D. Gorenstein, Finite Groups. — 2 ed. — AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2007.

[MI] M. Isaacs, Algebra: a graduate course. — Graduate studies in Mathematics, Vol. 100, AMS, 2009.