Dixon, Mortimer „Permutation Groups" 1991 г.
P. Cameron „Permutation groups"

Группы подстановок.

Ω – множество. $g: \Omega \to \Omega$ – биекция. Тогда $\{g: \Omega \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \Omega \mid \ldots\} = Sym(\Omega)$ – группа, относительно умножения $\cdot$, где $\alpha^{g \cdot h} = (\alpha^g)^h$, $\alpha \in \Omega$, $g, h \in Sym(\Omega)$. $Sym(\Omega)$ – симметрическая гр. на мн-ве Ω.

$Sym(\Omega)$ зависит в точ. до изом. только от мощности Ω: ~~от~~ Действительно, если $\sigma: \Omega \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \Omega'$, то $\varphi_\sigma: Sym(\Omega) \to Sym(\Omega')$ – изоморфизм, где $g = \begin{pmatrix} \cdots & \alpha & \cdots \\ \cdots & \beta & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_\sigma} \begin{pmatrix} \cdots & \alpha^\sigma & \cdots \\ \cdots & \beta^\sigma & \cdots \end{pmatrix}$
Если $|\Omega| = n$, то $Sym(\Omega) = S_n$.

$G \le Sym(\Omega)$, G наз. группой подстановок. Группа G действует на мн-ве Ω, если задан гомоморфизм $\varphi: G \to Sym(\Omega)$.

$\alpha \cdot g = \alpha^{\varphi(g)}$ – действие G на Ω. Если $\ker\varphi = 1$, то $G \simeq G/_{\ker\varphi} = \varphi(G) \le Sym(\Omega)$, т.е. G – группа подстановок. Когда $\ker\varphi = 1$, то действие наз. точным.

Действие G на $\Omega = G$ правыми сдвигами: $x^g = xg \in G = \Omega$. $\cdot^g$: ~~$x \mapsto xg$~~ $\Omega \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \Omega$, $\cdot^g \in Sym(\Omega)$

Значит мы имеем гомоморфизм $g \xmapsto{\varphi} \bar{g} = \cdot^g$ из G в $Sym(\Omega)$. $\ker\varphi = 1$, т.е. это изоморфизм.

Пример:

$G = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(32)\}$ – гр. Клейна.
$G \simeq C_2 \times C_2$. (Стаб. точки) $G_1 = 1$. (Орбита) $1^G = \{1,2,3,4\}$
$H = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$.
$H \simeq C_2 \times C_2$. Но теперь $H_1 = \{e, (34)\}$. $1^H = \{1,2\}$.

Пусть $\Delta \subseteq \Omega$. $H \subseteq G \le Sym(\Omega)$. Обозначим $\Delta^H = \{\delta^h \mid \delta \in \Delta, h \in H\}$. Пусть теперь $H \le G$. Обозначим $H_{\{\Delta\}} = \{h \in H \mid \Delta^h = \Delta\}$ – стабилизатор Δ как множества. ~~в~~ целом
$H_{(\Delta)} = \{h \in H \mid \forall \alpha \in \Delta: \alpha^h = \alpha\}$ – поточечный стабилизатор. Если H – группа, то оба стабилизатора $H_{\{\Delta\}}$ и $H_{(\Delta)}$ – подгруппы в G. Также $H_{(\Delta)} \le H_{\{\Delta\}}$. Более того,
$H_{(\Delta)} \trianglelefteq H_{\{\Delta\}}$
$H^\Delta = \{h|_\Delta \mid h \in H_{\{\Delta\}}\}$ – сужение H на Δ.

н-орб.

~~Др~~

$h, h' \in H_{\{\Delta\}}$. $h|_\Delta = h'|_\Delta \Leftrightarrow h^{-1}h' \in H(\Delta)$. Значит $H^\Delta \le Sym(\Delta)$ и $H^\Delta \cong H(\Delta)/H_{\{\Delta\}}$.

$\Delta = \{\alpha\}$, $H = G$. α^G – орбита α под действием G. $G_\alpha = G_{\{\alpha\}} = G_{(\alpha)}$ – стабилизатор точки.

$|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$. Это является следствием:

Пусть $G \le Sym(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \Omega$. Тогда:

1) $\alpha^G \cap \beta^G = \begin{cases} \alpha^G = \beta^G, \\ \varnothing; \end{cases}$

2) $\alpha^G = \beta^G \Rightarrow \beta = \alpha^x$ для нек. $x \in G$ & $G_\beta = G_\alpha^x$.

3) $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.

◀ 1) $\beta \in \alpha^G \Rightarrow \exists x \in G : \beta = \alpha^x$.

2) $\beta = \alpha^x$, $x \in G$. $\beta^{x^{-1}G_\alpha x} = \alpha^{G_\alpha x} = \alpha^x = \beta \Rightarrow$ $G_\alpha^x \subseteq G_\beta$. $\beta^{x^{-1}} = \alpha \Rightarrow G_\beta^{x^{-1}} \subseteq G_\alpha \Rightarrow G_\alpha^x = G_\beta$.

3) $x \sim y$, если $\alpha^x = \alpha^y$. Тогда $x \sim y \Leftrightarrow$ ~~если~~ $\Leftrightarrow \alpha^{xy^{-1}} = \alpha \Leftrightarrow xy^{-1} \in G_\alpha \Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$.

Т.е. классы экв. по $\sim$ суть в точности смежные классы по $G_\alpha \Rightarrow |\alpha^G| = |G : G_\alpha|$. ▶

~~Следствие~~ Если $\alpha^G = \Omega$, то говорят, что группа G транзитивна на Ω.

Следствие:

Если группа транзитивна, то стабилизаторы любых двух точек сопряжены.

Более того, $|\Omega| = |G : G_\alpha|$.

Группа $G \le Sym(\Omega)$ наз. регулярной, если она транзитивна и $G_\alpha = 1$, $\alpha \in \Omega$.

Если G – регулярна, то $|\Omega| = |G|$.

Примеры:

K_4 – регулярна. Действие G на себе правыми сдвигами $G_{right} \le Sym(G)$ является регулярным.

Dixon 1.24– –1.28, 1.2.11– 1.214, 1.3.2– 1.3.5, 1.4.1– 1.4.7

Группы ~~$G \le Sym$, $K \le$~~ $G \le Sym(\Omega)$, $K \le Sym(\Omega')$ подстановочно изоморфны, если сущ. биекция $\varphi : \Omega \to \Omega'$ и $\psi : G \to K$ – гр. изоморфизм, для которых: $\forall \alpha \in \Omega\ \forall x \in G : (\alpha\varphi)^{x\psi} = (\alpha x)^\varphi$.

Упр. Наши примеры K_4 не подобны. (Hint: при подобии, орбиты $\to$ орб., стаб. $\to$ стаб.)

Пример:

$H \le G$, $\Omega \in \{Hg \mid g \in G\}$. $\rho : G \to Sym(\Omega)$, где $x \in G \xmapsto{\rho} \begin{pmatrix} Hg & \cdots \\ Hgx & \cdots \end{pmatrix}$, т.е. $\forall g \in G : (Hg)^{x\rho} = Hgx$.

ρ – гомоморфизм, т.к. $(Hgx)y = (Hg)(xy)$.

$\ker\rho = \mathrm{core}_G H = \bigcap\limits_{g\in G} H^g$ — ядро ρ. Действительно:

$Hgx = Hg \Leftrightarrow Hgxg^{-1} = H \Leftrightarrow x^{g^{-1}} \in H \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{g\in G} H^g$ — ядро.

$\mathrm{core}_G(H)$ — макс. подгруппа H, норм. в G.

Замечание:

1) $H \le G$, $|G:H| = n < \infty \Rightarrow \exists K \le H : K \trianglelefteq G$, где $|G:K|$ делит $n!$ Т.е. если сущ. гр. конечного индекса, то в ней сущ. норм. подгр. конечного индекса.

◀ $K = \mathrm{core}_G H$, т.к. $G/K \hookrightarrow \mathrm{Sym}(\Omega)$, $|\Omega| = |G:H|$
$\Rightarrow |G:K|$ делит $|G:H|!$ ▶

2) G действует транз. на $\Omega = \{Hg \mid g\in G\}$.

Пусть $G \le \mathrm{Sym}(\Omega)$ — транз. $H = G_\alpha$, $\alpha\in\Omega$. Тогда G подобна G^ρ, ρ — д. на см. классах.

◀ $\Omega' = \{Hg \mid g\in G\}$. $K = G^\rho \le \mathrm{Sym}(\Omega')$. Рассмотрим отобр. $\varphi : \beta\in\Omega \longmapsto \widehat{H}_\beta = \{x\in G \mid \beta = \alpha^x\}$. Поймём, что $\widehat{H}_\beta$ — смежный класс Hx, $x\in\widehat{H}_\beta$.

$\alpha^{Hx} = \alpha^x = \beta \Rightarrow Hx \subseteq \widehat{H}_\beta$. $\widehat{H}_\beta \subseteq Hx$ очевидно.

Т.е. $\varphi(\beta)\in\Omega'$, $\beta\in\Omega$. φ — сюръекция из опр. действия x на Ω. $\varphi(\beta) = \varphi(\gamma) \Rightarrow$
$x\in\widehat{H}_\beta = \widehat{H}_\gamma \Rightarrow \alpha^x = \beta = \gamma = \alpha^x \Rightarrow \varphi$ — инъекция.

$\rho : G \to K$ — гомоморфизм „на". $\ker\rho = \mathrm{core}_G H =$
$= \bigcap\limits_{g\in G} H^g = \bigcap\limits_{\alpha\in\Omega} H_\alpha = 1$. ρ — изоморфизм.

Проверим согласованность φ и ρ.

$\beta\in\Omega$, $y\in G$. $\cancel{(\beta^\varphi)^{y\rho} = (\beta^y)^\varphi}$ $\cancel{(\beta^\varphi)^{y\rho}}$ $(\beta^y)^\varphi = (\alpha^{xy})^\varphi =$
$= Hxy$, где $\alpha^x = \beta$. $(\beta^\varphi)^{y\rho} = (Hx)^{y\rho} = Hxy$, т.е. получаем подст. изоморфизм. ▶

Первая т. Силова.

Пусть G — гр., $|G| = p^r l$, $p \nmid l$, p — простое.
Тогда $\exists H \le G : |H| = p^r$.

◀ $\mathcal{M} = \{M \subseteq G \mid |M| = p^r\} \ne \varnothing$. $|\mathcal{M}| = C_{p^r l}^{p^r} =$
$= \dfrac{(p^r l)!}{(p^r)!(p^r l - p^r)!} = \dfrac{p^r l \cdot\ldots\cdot(p^r l - p^r + 1)}{(p^r)!} = l\prod\limits_{j=1}^{p^r-1}\dfrac{p^r l - j}{j}$ — не дел. на p.

G действует на $\mathcal{M}$ правыми сдвигами.

Т.к. $p \nmid |\mathcal{M}|$, то сущ. $M\in\mathcal{M}$: $|M^G|$ не дел-ся на p.

$H = G_M$. $|M^G| = |G:H|$ — не дел. на $p \Rightarrow p^r \mid |H|$.

$x\in M$, $|xH| = |H|$, $xH \subseteq M \Rightarrow |H| \le |M| \Rightarrow |H| \le p^r$
$\Rightarrow |H| = p^r$. H — искомая подгруппа. ▶

Пример:

$K, H \le G$, $H \le N_G(K) = \{g\in G \mid K^g \subseteq K\}$. $N_G(K)$ — наиб. подгруппа G, в которой K норм-на.

$\sigma : H \to \mathrm{Sym}(K)$, $h \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots \\ & k^h & \end{pmatrix}$. σ — гомоморфизм
$k^{hz} = (k^h)^z \Rightarrow k^{(hz)\sigma} = (k^{h\sigma})^{z\sigma} = k^{h\sigma\cdot z\sigma}$. Тогда
$\ker\sigma = \{h\in H \mid \forall k\in K : k^h = k\} = C_H(K)$ — централизатор.

В частном случае, когда $K = H = G$, то это действие определено. Орбиты такого действия – классы сопр. эл-ов.

$h \in G$, $h^G = \{h^x \in G \mid x \in G\}$. $|h^G| = |G : C_G(h)|$.

Пусть G – конечная p-группа, $1 \neq K \trianglelefteq G$. $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G: h^g = h\}$. Тогда $Z(G) \cap K \neq 1$.

◀ G действует на K сопряжениями. Тогда $|x^G|$ – p-число $\forall x \in K$. $|1^G| = 1$, $|x^G| = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in Z(G)$, т.е. $x \in K \cap Z(G)$. K разбивается на орбиты: $|K| = \sum\limits_{x \in T} |x^G| = 1 + \sum\limits_{\dots} |x^G|$ – дел. на p $\Rightarrow \exists x \in K - \{1\}: |x^G| = 1 \Rightarrow K \cap Z(G) \neq \varnothing$. ▶

$\sigma : K \to Sym(K)$. Можно заменить $Sym(K)$ на $Aut(K)$, т.к. $(kk')^h = k^h \cdot k'^h$. Пусть теперь $\sigma : H \to Aut(K)$ – произв. гомоморфизм. Тогда будем говорить, что H действ. на K автоморфизмами. $N_G(K)/C_G(K) \leq Aut(K)$ – как следствие.

$K \times H = \{(k,h) \mid k \in K, h \in H\}$, операция зад. покомпонентно. Пусть H действует на K автоморфизмами $k \mapsto k^h$, $k \in K$, $h \in H$.

На мн-ве $K \times H$ задаём умножение по правилу: $(k,h) \cdot (k_2, h_2) = (k k_2^{h^{-1}}, h h_2)$. Тогда это полупрямое произведение $K \rtimes H$ – группа.

◀ Дз ▶

$G = K \rtimes H$. K^*, H^* – копии K и H в G, где $K^* = (K, 1)$, $H^* = (1, H)$. $K^* \cap H^* = (1,1) = 1_G$, $K^* \trianglelefteq G$.

$(k,1)^{(1,h)} = (1, h^{-1})(k,1)(1,h) = (k^{h}, h^{-1})(1,h) = (k^{h} \cdot 1, 1)$,

т.е. K^* действ. норм. в G и действие автоморфизмами на K есть сопр. в G.

Упр. $G \geq H, K$, $K \trianglelefteq G$, $G = HK$, $K \cap H = 1 \Rightarrow G \cong K \rtimes H$.

Дз 1.4.10 – 1.4.18 §2.5 [illegible] 2.5.1 – 2.5.7

$G \leq Sym(\Omega)$ – регулярна, если G транзитивна и $G_\alpha = 1$, $\alpha \in \Omega$.

Пример: $G = \langle(1234)\rangle$. $\Delta = \{1, 3\}$. $a = (1234) \Rightarrow$ $a^2 = (13)(24)$. $\Delta^{a^2} = \Delta$, $\Delta^a = \{2,4\}$, $\Delta^{a^2} = \Delta$, $\Delta^a = \Delta^{a^3}$. $\Omega = \{1,2,3,4\} = \Delta \sqcup \Delta^a$. Значит $g \in G$: $\Delta^g \cap \Delta = \varnothing$ или Δ.

Пусть G действ. транзитивно на Ω. Подмножество $\varnothing \neq \Delta \subseteq \Omega$ – блок, если $\forall x \in G: \Delta^x \cap \Delta = \varnothing$ или Δ.

Свойства блоков:

1) $x \in \Omega$. $\{x\}$ и Ω – тривиальные блоки.

2) Δ-блок, $x \in G \Rightarrow \Delta^x$-блок.

◀ 1) Очевидно. 2) $\Delta^{xy} \cap \Delta^x = (\Delta^{xyx^{-1}} \cap \Delta)^x = \varnothing^x$ или $\Delta^x \Rightarrow \varnothing$ или Δ^x. ▶

Рассмотрим $\Sigma = \{\Delta^x \mid x \in G\}$ — мн-во блоков. Σ — разбиение Ω в силу транзитивности G. Σ наз. системой импримитивности.

Если группа транзитивна, то будем считать, что степень предст. ≥ 2. Транзитивная группа ст. ≥ 3 примитивна, если в ней нет нетривиальных блоков. Не транзитивная гр. = интранзитивна, не примитивна = импримит.

3) Δ, Γ — блоки, $\Delta \cap \Gamma \neq \varnothing \Rightarrow \Delta \cap \Gamma$ — блок.

Блок наз. минимальным, если он нетривиален и он не имеет нетрив. собственных подблоков.

4) $G_{\{\Delta\}}$ транз. на Δ.

◀ $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow \exists g \in G: \alpha^g = \beta \Rightarrow \beta \in \Delta^g \cap \Delta \Rightarrow \Delta^g = \Delta \Rightarrow g \in G_{\{\Delta\}}$. ▶

$G^\Delta = G_{\{\Delta\}} / G_{(\Delta)}$. G — транз. $\Rightarrow x \in G$, $G^{\Delta^x} \simeq G^\Delta$.

$\Sigma = \{\Delta^x \mid x \in G\}$, Δ-блок. G действует на Σ. Ядро этого действия $\rho: G \to Sym(\Sigma)$,

$\ker \rho = \bigcap_{x \in G} G_{\{\Delta^x\}}$. $Im\, \rho = G^\Sigma$.

Пример:

$G = \langle \underbrace{(1234)}_{a} \rangle$, $\Delta = \{1,3\}$. $G_{\{\Delta\}} = \{a^2, e\} \simeq C_2$, $G_{(\Delta)} = 1$. $G^\Sigma \simeq C_2$. $\ker \rho = \langle a^2 \rangle$.

Упр. Найти наиб. подгруппу S_4 с блоком $\{1,3\}$.

Пусть G действ. транз. на Ω, $\alpha \in \Omega$. $\mathcal{B} = \{\Delta \subseteq \Omega \mid \alpha \in \Delta,\ \Delta\text{-блок}\}$, $\mathcal{S} = \{H \leq G \mid G_\alpha \leq H\}$. Тогда $\psi: \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ по правилу $\psi(\Delta) = G_{\{\Delta\}}$ есть биекция, сохр. отношение включения.

◀ $x \in G_\alpha \Rightarrow \alpha \in \Delta \cap \Delta^x \Rightarrow \Delta = \Delta^x \Rightarrow x \in G_{\{\Delta\}} \Rightarrow G_\alpha \leq G_{\{\Delta\}}$, т.е. ψ — отображение $\mathcal{B}$ в $\mathcal{S}$. $\varphi: \mathcal{S} \to \mathcal{B}$, по правилу $\varphi(H) = \alpha^H$. Пусть $\alpha^H = \Delta$. $\alpha \in \Delta$. $\Delta \cap \Delta^x = \alpha^H \cap \alpha^{Hx}$. Если $x \in H$, то $\alpha^{Hx} = \alpha^H \Rightarrow \Delta \cap \Delta^x = \Delta$. Т.е. $H \leq G_{\{\Delta\}}$. Пусть $x \notin H$. Допустим $\Delta \cap \Delta^x \ni \beta$. Тогда $\beta = \alpha^{h_1}$, $\beta = \alpha^{h_2 x} \Rightarrow \alpha^{h_1} = \alpha^{h_2 x} \Rightarrow \alpha = \alpha^{h_2 x h_1^{-1}} \Rightarrow h_2 x h_1^{-1} \in G_\alpha \leq H \Rightarrow x \in H$ — противоречие. Значит $\Delta \cap \Delta^x = \varnothing$ и $x \notin G_{\{\Delta\}}$, т.е. $H = G_{\{\Delta\}}$ и Δ-блок. Значит φ — корр. отображение

$\varphi(\psi(\Delta)) = \varphi(G_{\{\Delta\}}) = \alpha^{G_{\{\Delta\}}} = \Delta$. $H \in \Sigma$. $\psi(\varphi(H)) =$
$= \psi(\alpha^H) = G_{\{\alpha^H\}} = H \Rightarrow \varphi$ и ψ – биекции.

$\Delta \subseteq \Gamma$ – блоки. $g \in G_{\{\Delta\}} \Rightarrow \Gamma^g \cap \Gamma \supseteq \Delta \neq \varnothing$
$\Rightarrow \Gamma^g = \Gamma \Rightarrow g \in G_{\{\Gamma\}} \Rightarrow G_{\{\Delta\}} \leq G_{\{\Gamma\}}$.

$G_{\{\Delta\}} \leq G_{\{\Gamma\}} \Rightarrow \alpha^{G_{\{\Delta\}}} \subseteq \alpha^{G_{\{\Gamma\}}}$. ▶

Следствие:

Пусть G действ. транз. на Ω, $|\Omega| \geq 3$.
Тогда G примитивна $\Leftrightarrow$ G_α – макс. в G.

◀ G – примитивна $\Leftrightarrow |B| = 2 \Leftrightarrow G_\alpha$ – макс. в G ▶

Если G – регулярная прим. гр., то $G \cong C_p$, p-пр.

◀ 1 – макс. в $G \Rightarrow G \cong C_p$, p-пр.. ▶

Упр. Δ-блок, $\alpha \in \Delta$. Тогда $|\Delta| = |G_{\{\Delta\}} : G_\alpha|$,
$|\Sigma| = |G : G_{\{\Delta\}}|$.

Пусть G д. транз. на Ω, K – ядро этого действия, $H \trianglelefteq G$. Тогда:

1) Орбиты H есть система импрthe.

2) Δ, Δ' – орбиты $H \Rightarrow H^\Delta$ подобна $H^{\Delta'}$.

3) $\alpha \in Fix(H) = \{\beta \in \Omega \mid \beta^H = \beta\}$. Тогда $H \leq K$.

4) H имеет не более $|G:H|$ орбит, и если $|G:H| < \infty$, то их число делит этот инд.

5) Если G – прим. на Ω, то либо H – транз., либо $H \leq K$.

◀ 1) Если Δ – орбита H, то Δ^x – орбита H^x.
Если $H \trianglelefteq G$, то $\{\Delta^x \mid x \in G\}$ – орбиты $H \Rightarrow$
это полная система импримитивности.

2) Δ, Δ' – орбиты H. $\Rightarrow \exists c \in G: \Delta' = \Delta^c$.
$\varphi: \Delta \to \Delta'$, $\varphi(\alpha) = \alpha^c$ – биекция. $\psi: H^\Delta \to H^{\Delta'}$,
где $\psi(x^\Delta) = (x^c)^{\Delta'}$. ~~$\psi(x^c) = \psi(y^c)$~~ $x^\Delta = y^\Delta$
$\Rightarrow xy^{-1} \in H_{(\Delta)} \Leftrightarrow x^c (y^c)^{-1} \in H_{(\Delta^c)} \Leftrightarrow (x^c)^{\Delta'} = (y^c)^{\Delta'}$,
т.е. ψ опр. корректно и явл. инъекцией.
ψ – сюр. и гомоморфизм $\Rightarrow \psi$ – изоморфизм.
$\alpha \in \Delta$, $\varphi(\alpha)^{\psi(x)} = (\alpha^c)^{(x^c)^{\Delta'}} = (\alpha^c)^{c^{-1}xc} = \alpha^{xc} = \varphi(\alpha^x)$,
т.е. ψ – подобие.

3) $\alpha \in Fix(H) \Rightarrow H \leq G_\alpha \Rightarrow H \leq \bigcap_{\alpha \in \Omega} G_\alpha = K$.

4) Кол-во орб. $\times$ размер орб. $= |\Omega|$. Размер орб. делит $|H|$.

5) G-прим. Тогда у H либо все орб. 1-ные, т.е. $H \leq K$, либо одна орбита. ▶

$FSym(\Omega) = \{\pi \in Sym(\Omega) \mid supp\ \pi$ – конечен$\}$.
$FSym$ – финитарная симм. группа.

Д/з
1.5.5
(с ошибкой)
§1.5
целиком,
§1.6
до 1.6.5
включ.

Свойства:

1) $FSym(\Omega) \trianglelefteq Sym(\Omega)$.

2) $FSym(\Omega)$ – локально конечна, т.е. $\forall \mathfrak{X} \subseteq FSym(\Omega)$. $|\mathfrak{X}| < \infty \Rightarrow |\langle \mathfrak{X} \rangle| < \infty$.

p – простое число. C_{p^k} – цикл. гр. $C_p \leq C_{p^2} \leq C_{p^3}$.

$\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{p^k}$ – группа. (обозн. C_{p^∞} – квазицикл. гр.).

3) $x, y \in Sym(\Omega)$, $supp(x) \cap supp(y) = \Gamma$, $|\Gamma| = 1$.

Тогда $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y = (\alpha\beta\gamma)$ для нек. α, β, γ.

◀ $\alpha \in \Gamma$. $(\alpha\gamma\delta) = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \delta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}}_{x^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}}_{y^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}\beta & \gamma\\ \alpha & \delta\end{pmatrix}}_{x}\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}}_{y}$

См. рисунок. ▶

$x \in FSym(\Omega)$, $d(x)$ – декремент x ($|supp(x)|$ – кол-во нез. нетрив. циклов). $sgn(x) = (-1)^{d(x)}$ и

$sgn: FSym(\Omega) \to C_2 = \{-1, 1\}$ – гомоморфизм

$\ker sgn = Alt(\Omega)$ – знакопеременная группа.

Если $|\Omega| = n$, то пишем A_n.

4) $FSym(\Omega) = \langle (ij) \mid i, j \in \Omega \rangle$, $|\Omega| \geq 2$.

5) $Alt(\Omega) = \langle (ijk) \mid i, j, k$ – разл.$\rangle$, $|\Omega| \geq 3$.

◀ $(ij)(jk) = (ikj)$. $(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta) = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$ – т.е. нез. трансп. тоже можно получить. ▶

Пусть $|\Omega| \neq 4$, тогда $Alt(\Omega)$ – простая.

◀ $1 \neq N \trianglelefteq A = Alt(\Omega)$. Считаем, что $|\Omega| \geq 5$.

Если $(\alpha\beta\gamma) \in N$, то $\exists \pi \in FSym(\Omega): (\alpha\beta\gamma)^\pi = (\alpha'\beta'\gamma')$ – любой 3-цикл. $\exists \sigma \in FSym(\Omega)$ – транспозиция, $\pi\sigma \in Alt(\Omega)$, $(\alpha\beta\gamma)^{\pi\sigma} = (\alpha'\beta'\gamma')$ т.к. $|\Omega| \geq 5$

$\Rightarrow N = Alt(\Omega)$.

Если $x \in N$, $y \in A$, то $[x, y] \in N$. Значит дост. найти $x \in N$ такой, что ~~supp~~ $\subsetneq \Omega$ $|\Omega \setminus supp(x)| \geq 2$; ~~то~~ тогда $y = (\alpha\beta\gamma)$, $\alpha \in supp(x)$, $\beta \neq \gamma$, $\beta, \gamma \in \Omega \setminus supp(x)$. Тогда $[x, y]$ – 3-цикл и всё доказано.

x	y	$[x,y]$
$(1234\ldots)\ldots$	(123)	$(124) \in N$ ✓
$(123)(456)\ldots$	(124)	больший цикл (пред. п.)
$(12)(34)\ldots$	(123)	(1324) + (по пред.) ▶

Теорема Бэра.

$1 \trianglelefteq Alt(\Omega) \trianglelefteq FSym(\Omega) = S_0 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq S_{\nu+1} = Sym(\Omega)$, ?

где $|\Omega| \geq 5$. ~~$\aleph$-кардинал~~. $0 \leq \mu \leq \nu$. $S_\mu = \{g \in Sym(\Omega) \mid |supp\, g| < \omega_\nu\}$, ω_ν – $\nu+1$ кард. число. Этот ряд композиционный.

◀ Может быть потом. ▶

ДЗ Любую группу можно вложить в простую.

~~Опр.~~ $\rho: G \to Sym(\Omega)$, $\sigma: G \to Sym(\Gamma)$ — подст. представления. ρ и σ эквивалентны, если сущ. $\lambda: \Omega \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \Gamma$ такая, что $\forall \alpha \in \Omega\ \forall x \in G:\ (\alpha^{x\rho})^{\lambda} = (\alpha^{\lambda})^{x\sigma}$.

Пусть $\rho: G \to Sym(\Omega)$, $\sigma: G \to Sym(\Gamma)$ — транз. подст. представления. $H = G_\alpha$ — стаб. $\alpha \in \Omega$ в G^ρ. $\rho \sim \sigma \Leftrightarrow \exists \beta \in \Gamma:$ $H = G_\beta$ (в G^σ).

◀ Как и в случае с подобием. ▶

Замечание:

$c = \lambda$ $\Omega = \Gamma \Rightarrow c \in Sym(\Omega)$, $\alpha^c = \beta$ (в пред. т.). Т.е. $(\alpha^{x\rho})^c = (\alpha^c)^{x\sigma}$ $\forall \alpha \Rightarrow (x\rho)c = c(x\sigma) \Rightarrow$ $x\sigma = c^{-1} x\rho c$ — сопряжение.

Пример:

$K = Sym(\Omega)$, $|\Omega| = 5$. $R = Syl_5(K)$, K действует сопр. на R. $\underset{24\cdot 5}{|K| = 120}$, $|R| \equiv_5 1$ $\Rightarrow |R| = 1, 6, 11, 16, 21,$ $\Rightarrow |R| = 6$. Действие на силовских подгруппах гр. K транз.

$\rho: K \to Sym(R)$, ρ — транз. $\ker \rho \trianglelefteq K$ — прост. $\Rightarrow$ $\ker \rho = 1$. $Sym(R) \cong S_6$. Т.е. $G = S_6 \geq K$, $|K| = 120$, K-транзитивна. $\rho: G \to Sym_6$, где $x \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} Kg \\ Kgx \end{pmatrix}$ — действие на см. классах. $H \leq G$, H — стаб. точки 6. $H \cong S_5$. Тогда $\sigma: G \to S_6$ — действие на G/H (см. классах). Если $\rho \sim \sigma$, то $\exists c \in S_6$ $\forall x \in G: (x\rho)^c = x\sigma$ $\Rightarrow$ переводит один стаб. т. в другой. Но H — не транзитивна, а K — транз., т.е. $\rho \not\sim \sigma$. Но $G^\rho \cong G^\sigma$, т.к. $S_6 \cong S_6$. Значит из подобия образов не следует подобие представлений.

$\rho: G \to S_6$ — ~~гомо~~изоморфизм. Это внешний автоморфизм гр. S_6. ДЗ 1.6.0 – 16.17

Пусть $|\Omega| \geq 7$, Ω — конечно. Тогда $Aut(Sym(\Omega)) \cong Sym(\Omega)$.

Опр. $Inn(G) = \{\varphi \in Aut(G) \mid \varphi \text{ — внутренний}\}$, где φ — внутр. $\Leftrightarrow \exists g \in G:\ x^\varphi = x^g$.

Упр. 1. $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$, $Inn(G) \cong G/Z(G)$.

$\rho: G \to Sym(\Omega)$, $\sigma: G \to Sym(\Omega)$. ρ и σ

подобны $\Leftrightarrow \exists \varphi \in Aut(G) : ((G^{\sigma})_{\alpha})^{\varphi} = G^{\sigma}_{\beta}$.

▲ Они эквивалентны $\Leftrightarrow \exists \varphi \in Inn(G)$ ↑.

Пусть $7 \le |\Omega| < \infty$. Тогда $Aut(S(\Omega)) \cong S(\Omega) \cong Aut(A(\Omega))$.

◀ $S_n \hookrightarrow Aut(S_n)$, т.к. $Z(S_n) = 1$ и $S_n \cong Inn(S_n)$, будем считать, что S_n — подгруппа $Aut(S_n)$

Упр. 2.

это = эта теорема

Это тоже правда для $n = 4, 5$.

Лемма.

$n \ge 3$. $C_{S_n}(A_n) = 1$.

◀ Упр. 3. ▶

Лемма.

Если $\varphi \in Aut(S_n)$, $\varphi|_{A_n}$ то:

1) $A_n^{\varphi} = A_n$.

2) $\varphi|_{A_n} = id \Rightarrow \varphi = id$.

1) т.к. A_n ед. подгр.-а инд.-са 2

◀ 2) $x \in A_n$, $y \in S_n$. $\underbrace{y^{-1}xy}_{\in A_n} = (y^{-1}xy)^{\varphi} = (y^{\varphi})^{-1} x y^{\varphi}$. $\Rightarrow$

$y^{\varphi} y^{-1} x = x y^{\varphi} y^{-1} \Rightarrow y^{\varphi} y^{-1} \in C_{S_n}(A_n) = 1 \Rightarrow y = y^{\varphi}$. ▶

Лемма.

$A_n = \langle (12\gamma) \mid \gamma = 3 \ldots n \rangle$, $n \ge 3$.

◀ Упр. 4. ▶

Лемма.

$n \ge 5$. $|\alpha^{A_n}| \ge n$.

◀ $|\alpha^{A_n}| = k < n$. ~~$|\alpha^{A_n}| \cdot |C_{A_n}(\alpha)| = |A_n|$~~ $\Rightarrow$

$N \in C_{A_n}(\alpha)$

$|A_n| / 2 =$ $|A_n : C_{A_n}(\alpha)| = k < n \Rightarrow \exists N \trianglelefteq A_n : |A_n : N| \mid k!$.

Если $N = 1$, то $\frac{n!}{2} \mid k! \Rightarrow n! \mid 2k!$ — противоречие. ▶ A_n — проста

~~Если $N = A$~~ Лемма.

$n \ge 7$. $A_{n-1} \cong H < Alt(\Omega) = A_n$. $\overset{?}{\Rightarrow} \exists \alpha \in \Omega : H = A_{\alpha}$.

◀ От противного. Тогда H транзитивна.

Действ., по пред. лемме, её орбиты имеют порядок $\ge n - 1$. В стабилизаторах H не лежит $\Rightarrow$ H — транз. т.к. нет одной орбиты

Пусть $\varphi : H \to A_{n-1}$ — изоморфизм. Фикс. $n \ge 9$

$h \in H$: h^{φ} — 3-цикл. $\exists K \le H$, $K \cong A_{n-4}$, причём h центр. K. (K — прообраз A_{n-4}, где A_{n-4} действ. на символах, отл. от h^{φ}).

$n - 4 \ge 5 \Rightarrow K \cong A_{n-4}$ имеет орб. из $\ge n - 4$ точек. h не перемещает > 4 точек $\Rightarrow h$ — 3-цикл.

Расcм. h, $h^{\varphi} = (123)$, $h'^{\varphi} = (124)$ $\Rightarrow \langle h^{\varphi}, h'^{\varphi} \rangle \cong A_4 \Rightarrow \langle h, h' \rangle \cong A_4$. $\Rightarrow h = (\alpha\beta\gamma)$, $h' = (\alpha\beta\delta)$.

$\underbrace{(123), (124), \ldots}_{\to A_{n-1}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} (\alpha\beta\gamma_1), (\alpha\beta\gamma_2), \ldots$ $\Rightarrow$

$\langle (\alpha\beta\gamma_3), \dots (\alpha\beta\gamma_{n-1}) \rangle = H \Rightarrow H$ – стаб. точки, т.к. одного символа не хватает.

$n=8$: h^{φ} ~~центр.~~-3-цикл. h центр. A_4 и, в частности, $K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}_{\triangleleft} \cong C_2 \times C_2$. h перест. 4 символа $\Rightarrow h$ – 3-цикл.

$n=7$: H-транз., $H \cong A_6$ и имеет орб. из 7-и элементов. $7 \nmid |A_6|$ – противоречие. ▶

Пусть $\varphi \in Aut(A_n) = Aut(S_n)$ (по 2-ой лемм.). $\forall \alpha \in \Omega$. По пред. лемме, $(A_\alpha)^\varphi$. $A_\alpha \cong A_{n-1}$ $\Rightarrow (A_\alpha)^\varphi = A_{\alpha'}$ для нек. $\alpha' \in \Omega$. $g = \begin{pmatrix} \dots \alpha \dots \\ \dots \alpha' \dots \end{pmatrix} \in S_n$. $\varphi = \varphi_g$ (сопр. с помощью g). $\alpha^g = \alpha'$, $A_\alpha^g = A_{\alpha'}$ $\Rightarrow \varphi$ и φ_g действ. одинаково на стабилизаторах. Упр. 5. $\varphi = \varphi_g$. $\left(\begin{matrix} \psi = \varphi\varphi_g^{-1}, \ A_\alpha^\psi = A_\alpha \ \forall\alpha. \ x \in A_n. \\ A_\alpha^{(x\psi)} = A_\alpha^{x\psi} = A_{\alpha}^{x} = A_{\alpha^x} \Rightarrow A_{\alpha^{x\psi}} = A_{\alpha^x} \\ \Rightarrow \alpha^{x\psi} = \alpha^x \Rightarrow x^\psi = x \end{matrix} \right)$ ▶

$G \leq Sym(\Omega)$ – полурегулярна, если стаб. $\forall \alpha \in \Omega: G_\alpha = 1$.

Свойства:

1) G-полурегулярна $\Rightarrow \forall \alpha \in \Omega: |\alpha^G| = |G|$.

2) $|G| < \infty \Rightarrow |G| \mid |\Omega|$.

3) ~~G-регулярна~~ $\Rightarrow$ конечная G-транз. G-рег. $\Leftrightarrow |\Omega| = |G|$.

4) $H \leq G < Sym(\Omega)$. G – ½-рег. $\Rightarrow H$ – ½-рег. Если H-транз. $\Rightarrow G$ – транз.

$G \leq Sym(\Omega)$, $|\Omega| < \infty$. Предположим, что $C = C_{Sym(\Omega)}(G) = \{c \in Sym(\Omega) \mid \forall g \in G: cg = gc\}_{\triangleleft}$ – транз. Тогда G – ½-рег.

◀ $\alpha, \beta \in \Omega$. $\exists c \in C: \alpha^c = \beta$. $(G_\alpha)^c = G_{\alpha^c}$ и $(G_\alpha)^c = G_\beta \Rightarrow G_\alpha = G_\beta$ $\forall \alpha, \beta \Rightarrow G_\alpha = 1$. ▶

Следствие:

Транзитивные абелевы группы – регулярны и самоцентрализуется.

◀ $G \leq Sym(\Omega)$, G – аб. $G \leq C = C_{Sym(\Omega)}(G)$ – транз. $\Rightarrow G$ – ½-рег. $\Rightarrow G$ – регулярна. $G \leq C_{Sym(\Omega)}(C)$ – транз. $\Rightarrow C$ – ½-рег. $\Rightarrow C$ – рег. $\Rightarrow G = C$. ▶

Упр. 6.

G – полурег. $\Rightarrow C_{Sym(\Omega)}(G)$ – транз.

Конечная транзитивная группа $G \leq Sym(\Omega)$ наз. гр. Фробениуса, если $\forall \alpha \neq \beta \in \Omega: G_\alpha \neq 1$, $G_{\alpha\beta} = 1$.

Пусть G – гр. Фробениуса. Тогда:

1) $K = \{x \in G \mid supp\, x = \Omega$ или $\varnothing\}$ – подгруппа G. ядро

2) $P \in Syl_p(G_\alpha)$: P – цикл. при неч. p, P – либо

цикл., либо обобщ. кват. при $p=2$.

3) K – нильпотентна.

Упр 7.

а) $K \trianglelefteq G$, $G = K \rtimes G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$. G_α – дополнение.

б) $\forall x \in K^\# \ \forall y \in G_\alpha^\# : x^y \neq x$.

в) Если $2 \mid |G_\alpha|$, то K – абелева.

Конструкции

$R \subseteq \Omega^k$, R наз. k-местным предикатом.

$\mathcal{R}$ – мн-во отношений на Ω (даже разной местности). $\Phi = (\Omega, \mathcal{R})$ – комбинаторный объект (структура). $Aut(\Phi) = \{g \in Sym(\Omega) \mid \forall R \in \mathcal{R} : R^g = R\}$.

Примеры:

1) $\Gamma = (\Omega, E)$, $E \subseteq \Omega^2$ – граф.

$\alpha \in \Omega$, то $\alpha E = \{\beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in E\}$. $E\beta = \{\alpha \mid (\alpha,\beta) \in E\}$

Упр. 2.3.7– 2.3.11 2.2.6– 2.2.9 2.2.1– 2.2.5

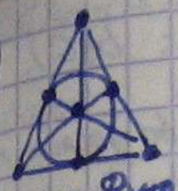
E^* – транспонирование отношения.

$Diag(\Omega^k) = \{(\alpha, \dots, \alpha) \mid \alpha \in \Omega\} = 1_{\Omega^k}$.

2) $\Phi = (\Omega, \le)$. $Aut(\Phi) = \{g \in Sym(\Omega) \mid \forall \alpha, \beta \in \Omega : \alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha^g \le \beta^g\}$

3) H – группа. $\mathcal{H} = (H, R)$, $R = \{(x, y, xy) \mid x, y \in H\}$

Тогда $Aut(H) = Aut(\mathcal{H})$.

4) 

– конечная проективная плоскость. Ω – точки, R – отношение „лежать на одной прямой". Упр. 2.4.2

$Aut(\Phi) = ?$ (порядка 168, простая). это $PSL_2(7)$

Пусть G действ. на Ω (или $G \le Sym(\Omega)$). Тогда G действ. на Ω^k покомпонентно. Если исходное действие точное, то и индуцированное – точное. $Orb_k(G, \Omega)$ – мн-во орбит этого действия. $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Orb_k(G, \Omega)$ – набор отношений. Эти отношения G-инвариантны, т.е. можно рассмотреть комб. объект $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$. $G \le Aut(\mathcal{X})$, но не обязательно $=$.

Пусть $G \le Sym(\Omega)$. Группа $G^{(k)} = Aut(\Omega, Orb_k(G, \Omega))$ наз. k-замыканием гр. G. $G \le G^{(k)}$. Группа G наз. k-замкнутой, если $G = G^{(k)}$.

Пример:

G – транз. на Ω. $G^{(1)} = Sym(\Omega)$.

Пусть $G \le Sym(\Omega)$. $\Delta \subseteq \Omega$ – база гр. G, если $G_{(\Delta)} = 1$ (поточечный). Наим. размер базы

гр. G называется базовым числом: $b(G)$.

Если $|\Omega|=n$, то $b(G) \leq n-1$. (рав-во достиг. на S_n).

$\{\alpha_1 \ldots \alpha_b\}$ – база G. $x, y \in G$. $x=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i=1..b : \alpha_i^x = \alpha_i^y$.

$G_{(\Delta)} = 1 \Rightarrow$ действие G на $\Delta \in R \in Orb_b(G, \Omega)$

$\Rightarrow |R| = |G|$.

Пусть $G \leq Sym(\Omega)$, $|\Omega| < \infty$. $b = b(G)$.

Тогда G $b+1$-замкнута, т.е. $G = G^{(b+1)}$.

◀ $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_b\}$ – база гр. G. $K = G^{(b+1)}$. Т.к. $Orb_{b+1}(K, \Omega) = Orb_{b+1}(G, \Omega)$, то пусть $k \in K$, и $\forall \alpha \in \Omega$ $\exists k_\alpha \in G : (\alpha_1 \ldots \alpha_b, \alpha)^k = (\alpha_1, \ldots, \alpha_b, \alpha)^{k_\alpha}$.

$\forall \alpha, \beta \in \Omega$: $\cancel{(\alpha_1, \ldots, \alpha_b, \alpha)^k} \Rightarrow \alpha_i^{k_\beta} = \alpha_i^k$, $\alpha_i^{k_\alpha} = \alpha_i^k$

$\Rightarrow$ $k_\beta = k_\alpha$, т.к. они из G и действуют одинаково на базе. Значит k_α не зависит от α. k_0 – любое k_α, $\alpha \in \Omega$. $k_0 = k$, т.к. k подоб. они действуют одинаково на всех α ▶

Следствия:

1) Полурегулярные группы 2-замкнуты.

2) $G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots \geq G^{(b+1)} = G$.

$R \in Orb_2(\Omega, G)$ наз. орбитально.

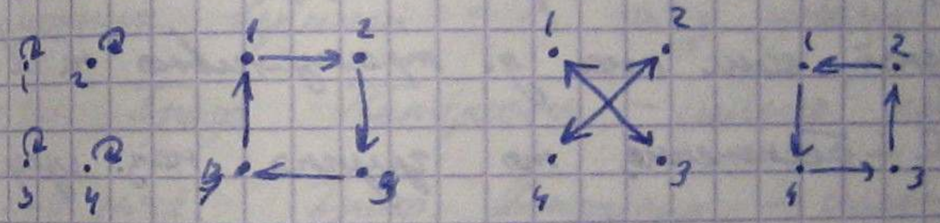
$G \in Sym(\Omega)$, G – транзитивна. Тогда имеется биекция между $\mathcal{R} = Orb_2(\Omega, G)$ и $\mathcal{S} = Orb_1(\Omega, G_\alpha)$ по правилу $\beta \in \Theta \in S \longmapsto (\alpha, \beta) \in R \in \mathcal{R}$.

◀ Упр. ▶

Пример:

$\Gamma = (\Omega, R)$, $R \in Orb_2(\Omega, G)$, Γ – орбит. граф.

$G = \langle (1234) \rangle$.



Теорема Хигмана.

Транз. группа $G \leq Sym(\Omega)$ примитивна $\Leftrightarrow \forall R \in Orb_2(G) \setminus Diag(\Omega)$: (Ω, R) – связен.

◀ Пусть Δ – комп. связности (Ω, R). $2 \leq |\Delta| < |\Omega|$. Δ – блок, т.к. пути переходят в пути.

$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ – импримитивность. $\Rightarrow \exists \sim : \alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha, \beta \in \Delta_i$. $\sim$ – G-инвариантно. Наоборот тоже верно.

$\Omega = \bigcup D_i$, D_i – комп. связн. R. Это разбиение G-инвариантно $\Rightarrow$ система импримитивности.

Упр. В верш. транз. графе сильная и слабая связность равны.

2.4.3 – 2.4.10 доп. объяснения

$\Omega \neq \Delta \ni \alpha, \beta$, $\alpha \neq \beta$. $R = (\alpha, \beta)^G$. Тогда граф (Ω, R) не связен.

$\Omega^{(k)} = \{(\alpha_1 \ldots \alpha_k) \in \Omega^k \mid \alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j\}$.

$|\Omega^{(k)}| = \frac{n!}{(n-k)!}$. $\Omega^{\{k\}} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid |A| = k\}$.

$|\Omega^{\{k\}}| = C_n^k$.

Группа $G \in Sym(\Omega)$ наз. k-транзитивной, если G д. транз. на $\Omega^{(k)}$. Группа G наз. k-однородной, если она д. транзитивно на $\Omega^{\{k\}}$. Если Ω – бесконечно, то группа наз. супертранзитивной (супероднородной), если она k-транз. (k-одн.) $\forall k \in \mathbb{N}$.

Пример:

$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, $V = \Omega^{\{2\}} = \{\overset{1}{\alpha\beta}\ \overset{2}{\gamma\delta}\ \overset{3}{\varepsilon\alpha}\ \overset{4}{\beta\gamma}\ \overset{5}{\delta\varepsilon}\ \overset{6}{\gamma\varepsilon}\ \overset{7}{\varepsilon\beta}\ \overset{8}{\beta\delta}\ \overset{9}{\delta\alpha}\ \overset{10}{\alpha\gamma}\}$. $G = Sym(\Omega) \hookrightarrow Sym(V)$.

$R = Orb_2(G, V)$

• – вторая орбита

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	•	•	1	1	•	•	•	•
2		0	1				1			
3			0	1				1		
4				0	1				1	
5					0					1
6						0		1	1	
7							0		1	1
8								0		1
9									0	
10										0

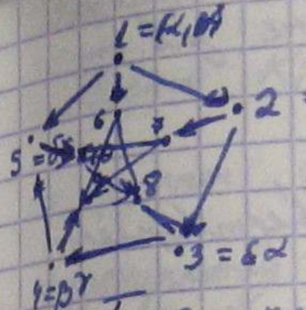
G действ. транз. на V.

$G_1 = G_{\{\alpha, \beta\}}$.

$2^{G_1} = \{2, 5, 6\}$

$3^{G_1} = \{3, 9, 10, 4, 7, 8\}$

~~$4^{G_1} = \{4, 7, 8\}$~~



Получился граф Петерсона.

Граф Джонсона $J(n, k)$:

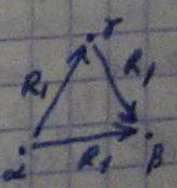
$V = \Omega^{\{k\}}$, $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 \cap v_2 \in \Omega^{\{k-1\}}$.

Граф регулярен, если валентности его вершин одинаковы. Граф – сильно регулярен, если $\exists \lambda, \mu$, $\mu \neq 0$: кол-во общих соседей любых смежных вершин $= \lambda$, а у любых несмежных $= \mu$. Граф Петерсона – сильно рег. с $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Граф Джонсона — сильно рег. с $\lambda = ?$, $\mu = ?$. Д/З

$G \leq Sym(\Omega)$ (2-транз.). $|Orb_2(G)| = 3$. $|Orb_2(G)| = rank\, G$.

R_1, R_2 – недиагон. отн. $\Gamma = (\Omega, R_1)$ – сильно рег.

$(\alpha, \beta) \in R_1$ — α и β смежны.



$(\alpha_1, \beta_1) \in R_1 \Rightarrow \exists g \in G: \alpha_1 = \alpha^g, \beta_1 = \beta^g$.

$(\alpha, \beta) \notin R_1 \Rightarrow (\alpha, \beta) \in R_2$ – не смежны.

$G \leq Sym(\Omega)$, $R = Orb_2(G, \Omega)$. $X = (\Omega, R)$.

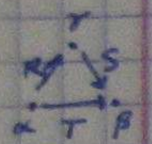
$R \in \mathcal{P}(\Omega^2)$
$R^{\cup} = \{$ все возм. объед. $\}$

Св-ва X:

1) R – разбиение Ω^2.

2) $Diag(\Omega^2)$ – объед. некоторых 2-орбит.

3) $R^* = R^T = \{(\alpha, \beta) \mid (\beta, \alpha) \in R\} \in$ ~~$Orb_2(G, \Omega)$~~ R.



4) $R, S, T \in \mathcal{R}$. $|\alpha R \cap S\beta| = c^T_{RS}$ не зав. от пары $(\alpha,\beta) \in T$.

Пусть $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$, где $\mathcal{X}$ удовлетворяет св-ам 1)–4). Тогда $\mathcal{X}$ наз-я когерентной конфигурацией на Ω. Порядок $\mathcal{X} = |\Omega|$, ранк $\mathcal{X} = |\mathcal{R}|$, c^T_{RS} — числа пересечения. Если в $\mathcal{X}$ диагональ есть базисное отношение (т.е. эл-т из $\mathcal{R}$), то $\mathcal{X}$ наз. однородной.

или схемой отношений

Ког. конф-ия Шурова, если $\exists G \le Sym(\Omega)$: $\mathcal{R} = Orb_2(G, \Omega)$.

ДЗ 2.1.1 – 2.1.11

ДЗ Построить с точ. до изоморфизма ког. конф. порядка 3, 4, 5 и 6, ~~и док-ть~~ вычислить числа пересеч. и док-ть, что они все Шуровы.

занятие через 2 недели

$G_i, i \in I$ — сем-во групп. $\prod_{i\in I} G_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i \mid \forall i \in I: f(i) \in G_i\}$, $\bigotimes_{i\in I} G_i = \{f \in \prod_{i\in I} G_i : |supp\, f| < \infty\}$. $|I| < \infty \Rightarrow \prod_{i\in I} G_i = \bigotimes_{i\in I} G_i$.

Подгруппа H декартового (прямого) пр. наз поддекартовым (подпрямым) пр. групп, если $\forall i \in I$ $\forall g_i \in G_i$ $\exists g \in H : g(i) = g_i$.

Теорема Ремака.

Пусть $K_i, i \in I$ — сем-во нормальных подгрупп группы G. $K = \bigcap_{i\in I} K_i$. Тогда G/K изоморфна поддекартову произведению $G/K_i, i \in I$.

◀ $\varphi : G \to \prod_{i\in I} G/K_i$. $\varphi(g)_i = K_i g$. φ — гомоморфизм, т.к. $\varphi(g_1 g_2)_i = K_i g_1 g_2 = K_i g_1 K_i g_2 = \varphi(g_1)_i \varphi(g_2)_i$, $i \in I$. Для каждого $i \in I$, φ_i — эпиморфизм. $g \in \ker\varphi \Leftrightarrow \forall i \in I: \varphi(g)_i = K_i \Leftrightarrow \forall i \in I : g \in K_i \Leftrightarrow g \in K$. ▶

$G \leqq \prod_{i\in I} G_i$ — поддекартово произведение.

Примеры:

$GL_n(\mathbb{Z}) \leqq \prod_{m\in\mathbb{N}} GL_n(\mathbb{Z}_m)$. $Q_p = \{\frac{m}{p^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k \ge 0\}$.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \leqq \sum Q_p$.

$\Omega = \bigsqcup_{i\in I} \Delta_i$ — разбиение, Δ_i — G-инвариантны,

$G \le Sym(\Omega)$. $G^\Delta = G^{\{\Delta\}}/G_{(\Delta)} = G/G_\Delta$, $G_\Delta \trianglelefteq G$.

$K = \bigcap_{i\in I} G_{(\Delta_i)} \trianglelefteq G$. По т. Ремака, $G \leqq \prod_{i\in I} G^{\Delta_i}$.

Следствие:

$G \le Sym(\Omega)$, $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} \Delta_i \Rightarrow G \leqq \prod_{i\in I} G^{\Delta_i}$, Δ_i — G-инв.

G „собирается" из своих транз. компонент.

Пример:

$G = \langle (12)(34) \rangle$, $H = \langle (12), (34) \rangle$. $\Omega = \underbrace{\{1,2\}}_{\Delta_1} \cup \underbrace{\{3,4\}}_{\Delta_2}$

$G^{\Delta_1} \simeq C_2$, $G^{\Delta_2} \simeq C_2$, $H^{\Delta_1} \simeq C_2$, $H^{\Delta_2} \simeq C_2$.

$|G|=2,\ |H|=4 \Rightarrow G \leq C_2 \times C_2$ (диагональна).

Теорема Фукса.

$\varphi_i : G_i \xrightarrow{\text{на}} T,\ i=1,2.$ Тогда $G = \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 \mid \varphi_1(g_1)=\varphi_2(g_2)\}$ — подпрямое произведение G_1 и G_2.

Пусть $G \leq G_1 \times G_2$. $\pi_i : G \to G_i$ — проекция, $i=1,2$.

$K_1 = \pi_1(\ker \pi_2) \trianglelefteq G_1$, $K_2 = \pi_2(\ker \pi_1) \trianglelefteq G_2$ и

пара $(g_1,g_2) \in G \Leftrightarrow \overline{\varphi}_1(g_1) = \overline{\varphi}_2(g_2)$, где $\varphi_i : G_i \xrightarrow{\text{на}} G_i/K_i$

◀ G — подгруппа в $G_1 \times G_2$. $\forall g_1 \in G_1\ \exists g_2 \in G_2$: $\varphi_1(g_1)=\varphi_2(g_2)$ (т.к. φ_2 — эпиморфизм) $\Rightarrow (g_1,g_2) \in G$.

$H_1 = \{(g_1, 1) \mid g_1 \in G_1\}$, $H_2 = \{(1, g_2) \mid g_2 \in G_2\}$.

$F = G_1 \times G_2 = H_1 H_2$. $M_1 = G \cap H_1$, $M_2 = G \cap H_2$.

$K_1 \leftrightarrow M_1$, $K_2 \leftrightarrow M_2$. $M_1 = \ker \pi_2$, $M_2 = \ker \pi_1$.

$M_i \trianglelefteq F,\ i=1,2$. $M_1 \cap M_2 = 1$. $M = M_1 M_2 \simeq K_1 \times K_2$.

$T = G/M$. $T \simeq G/M_1 \simeq H_2/M_2 \overset{?}{\simeq} G_2/K_2$.

$\cancel{H_2/M_2 \simeq G_2 \simeq G/K_1}$ $\cancel{G/M_1 \simeq G_2}$ $G \leq \underbrace{G/M_2}_{\simeq G_1} \times \underbrace{G/M_1}_{\simeq G_2}$

$M_1M_2/M_2 \trianglelefteq G/M_2$, $M_1M_2/M_1 \trianglelefteq G/M_2$. $G_2/K_2 \simeq \dfrac{G/M_1}{M_1M_2/M_1} \overset{?}{\simeq}$

$\simeq G_1/K_1$. (— понимаем, как изоморфизм).

$g \in F$. $g \in G \Rightarrow \overline{\varphi_1}(\pi_1(g)) = \overline{\varphi_2}(\pi_2(g))$, $\Leftrightarrow M_1M_2g = M_1M_2$ ▶

Пример:

$G = \langle (12)(34) \rangle$, $H = \langle (12), (34) \rangle$. $\Delta_1 = \{1,2\}$, $\Delta_2 = \{3,4\}$

$M_2 = G(\Delta_1) = 1$, $M_1 = G_{(\Delta_2)} = 1$. $T = G/1 \simeq S_2$

$\varphi_1 : (12) \longmapsto (34)$, $\varphi_2 : (34) \longmapsto (12)$.

$H_{(\Delta_1)} = \langle (34) \rangle = M_2$, $M_1 = H_{(\Delta_2)} = \langle (12) \rangle$.

$H/M_1M_2 \simeq 1$, $\varphi_1 : M_1 \to 1$, $\varphi_2 : M_2 \to 1$.

Следствие:

Если G — группа, $G \in Sym(\Omega)$, $\Omega = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, Δ_i — G-инв., и G^{Δ_1} и G^{Δ_2} не имеют общих нетривиальных гомоморфных образов. Тогда $G = G^{\Delta_1} \times G^{\Delta_2}$.

◀ Теорема Ремака + Фукса. ▶

ДЗ Найти с точ. до подобия, все группы $G \leq Sym(\Omega)$, $\Omega = \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \sqcup \Delta_3$, $|\Delta_1| = |\Delta_2| = 3$, $|\Delta_3| = 6$, $G^{\Delta_1} \simeq G^{\Delta_2} \simeq S_3$, $G^{\Delta_3} = \langle$цикл длины 6$\rangle$. упр. 1.6.18, 19, 20, 21

$\Omega = \Delta_1 \sqcup \ldots \sqcup \Delta_m$, Δ_i — блоки, $|\Delta_i| = k$, $\Sigma = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$.

$\sim_\Sigma$ — соотв. отн. эквивалентности. $\Phi = (\Omega, \sim_\Sigma)$.

$G = Aut(\Phi) = ?$ $\Delta \in \Sigma \Leftrightarrow \Delta^x \in \Sigma$, где $x \in G$. G действует на $\Sigma \Rightarrow \varphi : G \to Sym(\Sigma) \simeq S_m$.

$B = \ker \varphi = G_{(\Sigma)} = \bigcap_{i=1}^{m} G_{\{\Delta_i\}} \simeq \underbrace{S_k \times \ldots \times S_k}_{m}$. На самом деле, $G = B \rtimes S_m$. (это сплетение).

$Fun(\Gamma, K)$ – ф-ии из Γ в K.

Пусть K и H – гр., $\varphi: H \to Sym(\Gamma)$ – действие на $\Gamma \neq \varnothing$. $K \wr_\varphi H$ (сплетение K посредством H) есть полупр. произведение $Fun(\Gamma, K) \rtimes H$, где $f_\gamma^{x^{-1}} = f_{\gamma x}$ $\forall x \in H$. $B = \{(f, 1) \mid f \in Fun(\Gamma, K)\} \cong Fun(\Gamma, K)$ – базисная подгруппа. $|K \wr H| = |K|^{|\Gamma|} \cdot |H| = |B| \cdot |H|$.

Умножение элементов в $K \wr H$.

$((f_1 \dots f_m), x) \cdot ((h_1 \dots h_m), y) = ((f_1 \dots f_m)(h_1 \dots h_m)^{x^{-1}}, xy) =$

$= ((f_1 h_{1^{x}}, \dots, f_m h_{m^{x}}), xy)$, где $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ 1^x & 2^x & \dots & m^x \end{pmatrix}$

Пример

$H = K = S_2$ $\varphi: H \xrightarrow{\sim} S_2$, $|\Gamma| = 2$, $G = S_2 \wr S_2 \cong D_8$

$K = \langle a \rangle$, $H = \langle b \rangle$. $((a, 1)b)^2 = b(a,1)b(a,1)b =$

$= (a, a)$, $(a, a)^2 = (1, 1) \Rightarrow o((a,1)b) = 4$.

$b(a,1) = b(a,1)bb = (1,a)b \neq (a,1)b \Rightarrow G$ – неабелева.

Д/з $G = C_p \wr C_p$, $\exists x \in G$ $|x| = p^2$.

Пусть $G \leq Sym(\Omega)$ транз. импримитивна, $\Sigma = \{\Delta^g \mid g \in G\}$ – сист. импримитивности.

$\varphi: G \to Sym(\Sigma)$ – действие. Тогда:

а) G^φ – транз. в $Sym(\Sigma)$, G^Δ – транз. в $Sym(\Delta)$.

б) $\ker \varphi \lesssim Fun(\Gamma, G^\Delta) = B$.

в) $G \lesssim G^\Delta \wr G^\varphi \leq Sym(\Delta) \wr Sym(\Sigma)$.

◀ Д/з ▶

Пример

$G \leq Sym(4)$ – транз. $\Sigma = \{\underbrace{\{1,3\}}_{\Delta_1}, \underbrace{\{2,4\}}_{\Delta_2}\}$

$G \lesssim S_2 \wr S_2$ по теореме. $G^\Delta = S_2$ (т.к. G транз. на Δ_1), $G^\varphi = S_2$ по такой же причине. $G_{(\Sigma)}$ либо $S_2 \times S_2$, тогда $G \cong D_8$.

Либо $G_{(\Sigma)} = \langle (13)(24) \rangle$. Тогда $G = \langle (1234) \rangle$ или $G = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ – гр. Клейна.

Если $\rho: H \to Sym(H)$ рег. действие (гр. сдвигами), то $K \wr H = K \wr_\rho H$ – рег. сплет.

Теорема об универсальном вложении (1951)

Пусть G – гр., $K \trianglelefteq G$, $H \cong G/K$. Тогда $\exists$ вложение $\varphi: G \to K \wr H$, причем $\varphi(K) = \varphi(G) \cap B$, B – база сплетения.

◀ $\psi: G \to H$, $K = \ker \psi$ $T = \{t_u \mid u \in H\}$ – правая трансверсаль K в G, т.е. $\psi(t_u) = u$ $\forall u$. $\forall x \in G$: $t_u x \cdot t_{u\psi(x)}^{-1} \in K$. $\forall x \in G$ определим $f_x \in Fun(H, K)$ по правилу $f_x(u) = t_u x \cdot t_{u\psi(x)}^{-1}$. Рассмотрим [illegible]

$\varphi : G \to K \wr H$ по правилу $\varphi(x) = (f_x, \psi(x))$.

Докажем, что φ — гомоморфизм.

$\varphi(x)\varphi(y) = (f_x, \psi(x))(f_y, \psi(y)) = (f_x f_y^{\psi(x)^{-1}}, \psi(xy))$.

$f_{xy} = f_x f_y^{\psi(x)}$? Пусть $u \in H$. Тогда

$f_{xy}(u) t_{u\psi(xy)} = t_u xy = f_x(u) t_{u\psi(x)} y = f_x(u) f_y(u\psi(x))$ [illegible]

$t_{u\psi(x)\psi(y)} = f_x(u) f_y^{\psi(x)^{-1}}(u) t_{u\psi(xy)} \Rightarrow f_{xy} = f_x f_y^{\psi(x)^{-1}}$

$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ — это гомоморфизм.

$\ker\varphi \ni x \Rightarrow f_x = 1,\ \psi(x) = 1.\quad t_1 x t_1^{-1} = 1$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \ker\varphi = 1$. φ — вложение.

$\varphi(x) \in B \Leftrightarrow \psi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in K$.

Пример:

Централизатор эл-та S_n.

$x \in S_n$, $x = (\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots) \longleftrightarrow (n_1^{k_1} \ldots n_s^{k_s})$ — k_i циклов длины n_i (с учётом $n_i = 1$).

x и y сопр. в $S_n \Leftrightarrow$ их цикл. стр. одинак.

$C_{S_n}((12 \ldots n)) = \langle (12 \ldots n) \rangle$ (размер класса $\frac{n!}{n} \Rightarrow |C_{S_n}(\ldots)| = n$).

$C = C_{S_n}(x)$, $\Omega = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_s$ — орбиты C, где $|\Omega_i| = n_i k_i$, Ω_i — элементы, стоящие в циклах дл. n_i.

$C \leq \bigotimes_{i=1}^{s} C^{\Omega_i} \Rightarrow C = \bigotimes_{i=1}^{s} C^{\Omega_i}$

Можно считать, что C транз. на Ω,

$|\Omega| = n_1 k_1$. Эфф-ы циклов есть система импримитивности $\Rightarrow C \leq C^{\Delta} \wr S_{k_1}$ — опять равенство. $C = C^{\Delta} \wr S_{k_1}$. C^{Δ} — цикл длины

$|\Delta| = n_1 \Rightarrow C^{\Delta} = C_{n_1} \Rightarrow C = C_{n_1} \wr S_{k_1}$.

Тогда в общем $C = \bigotimes_{i=1}^{s} C_{n_i} \wr S_{k_i}$.

Следствие:

Критерий сопр. в A_n. $x \in A_n$, $x^{S_n} \subset A_n$

$C = C_{A_n}(x) = C_{S_n}(x) \cap A_n$. $|C_{S_n}(x) : C| = 1$ или 2.

Если $|\,:\,| = 2$, то $|x^{A_n}| = |A_n : C| = |S_n : \tilde{C}| = |x^{S_n}|$.

Если $|\,:\,| = 1$, то $|x^{A_n}|$ — половина от $|x^{S_n}|$.

Орбита распадается $\Leftrightarrow$ есть нечётная подстановка в C. Не распадается $\Leftrightarrow$ либо в x есть цикл чётн. длины, либо есть два цикла один. длины.

G - транз. на Ω, $\Sigma = \{\Delta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — система импримитивности. $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(\Sigma)$.

1) G^{φ} транз. на Σ, G^{Δ} транз. на Δ, $\Delta \in \Sigma$

2) $G_{(\Sigma)} = \ker\varphi \leq \mathrm{Fun}(\Gamma, G^{\Delta})$.

3) $G \leq G^{\Delta} \wr G^{\Sigma} \leq \mathrm{Sym}(\Delta) \wr \mathrm{Sym}(\Sigma)$.

Пример:

$G = \langle a, b \mid a^5 = b^4,\ a^b = a^2 \rangle \simeq \langle (12345), (2354) \rangle =$

$= \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle_n$ — примитивная группа (2-транз.).

$H = \langle b^2 \rangle$. Смежные классы по H:

$\underset{1}{H},\ \underset{3}{Ha},\ \underset{5}{Ha^2},\ \underset{7}{Ha^3},\ \underset{9}{Ha^4},\ \underset{2}{Hb},\ \underset{4}{Hba},\ \underset{6}{Hba^2},\ \underset{8}{Hba^3},\ \underset{10}{Hba^4}$

G действует на G/H правыми сдвигами.

$a \leftrightarrow (1\,3\,5\,7\,9)(2\,4\,6\,8\,10)$. $b \leftrightarrow (1\,2)(3\,6\,9\,8)(4\,5\,10\,7)$.

$h = b^2 \leftrightarrow (3\,9)(6\,8)(4\,10)(5\,7)$.

$\Gamma_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\Gamma_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. $\Gamma = \Gamma_1$. $\Phi = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.

$G_{(\Gamma)} = 1$. $G^{\Gamma} = G_{\{\Gamma\}}/G_{(\Gamma)} \simeq G_{\{\Gamma_1\}} = G_{\{\Gamma_2\}} = G_{(\Phi)} =$

$= \langle a, h \rangle \simeq D_{2\cdot 5}$ — гр. индекса 2, b в ней не

лежит. $G^{\Sigma} = G^{\Phi} = G/G_{(\Phi)} \simeq C_2$. На этом

примере „непр. теорема" выполняется.

$\Delta = \Delta_1 = \{1, 2\}$, $\Delta_2 = \{3, 4\}$, $\Delta_3 = \{5, 6\}$, $\Delta_4 = \{7, 8\}$,

$\Delta_5 = \{9, 10\}$ — система импримитивности.

$G_{(\Delta)} = \langle b^2 \rangle = H$. $G_{\{\Delta\}} = \langle b \rangle$. $G^{\Delta} \simeq C_2$.

$\Sigma = \{\Delta_1 \ldots \Delta_5\}$. $G_{(\Sigma)} = 1$. $G \simeq G^{\Sigma} \leq G^{\Delta} \wr G^{\Sigma}$.

$\ker \varphi = 1$, G изоморфно дополнению.

Замечание:

Это гр. Фробениуса с ед. мин. норм. подгр.

H действ. на Γ, K действ. на Δ. Тогда

$G = H \times K$ действует на $\Gamma \cup \Delta$. Рассмотрим

действие G на $\Omega = \Gamma \times \Delta$ по правилу:

$(\gamma, \delta)^{(h,k)} = (\gamma^h, \delta^k)$.

Если H транз. на Γ, а K на Δ, то

G будет транз. на Ω.

$\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ — декартово произведение. $G = \prod_{i \in I} G_i$,

где $G_i \leq Sym(\Omega_i)$ и определим действие G на Ω:

$(\omega_i)^g = \omega_i^{g_i}$ — т.е. покомпонентно.

Это действие точное, т.е. $G \leq Sym(\Omega)$.

$G = H \times K \leq Sym(\Omega)$, $\Omega = \Gamma \times \Delta$, $H \leq Sym(\Gamma)$, $K \leq Sym(\Delta)$

— транз. группы.

1) G транз. на Γ

2) $\forall \gamma \in \Gamma : \Delta_\gamma = \{(\gamma, \delta) \mid \delta \in \Delta\}$ — блок, а мн-во

$\Phi = \{\Delta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — система импримитивности

3) $\Gamma_\delta = \{(\gamma, \delta) \mid \gamma \in \Gamma\}$ — блок, $\Sigma = \{\Gamma_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — с.им.

4) $\Delta_\gamma \cap \Gamma_\delta = \{(\gamma, \delta)\}$

5) $K \simeq G^{\Delta_\gamma} \simeq G^{\Sigma}$, $H \simeq G^{\Gamma_\delta} = G^{\Phi}$.

Обратно, если $G \leq Sym(\Omega)$ — транз. гр.

и сущ. две системы импримитивности Φ и Σ,

удовл. условиям 4), 5), то $G = H \times K$, где $K = G^{\Delta_\gamma}$, $H = G^{\Delta_\delta}$.

◀ $\Rightarrow$: легко. $\Leftarrow$: по т. о примитивности два раза и пересечь. ▶

$G = K \times K$, $\Omega = \Delta \times \Delta$.

Пример:

$K = S_3$, $\Delta = \{1,2,3\}$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$G = \langle (123)(456)(789), (23)(56)(89),$ — столбцы
$(147)(258)(369), (47)(58)(69) \rangle$ — строки.

$t = (24)(37)(68)$ — транспонирование.

~~$A = \langle G, t \rangle$~~ $A = \langle G, t \rangle_n = G \rtimes \langle t \rangle = (K \times K) \rtimes \langle t \rangle_n \cong S_3 \wr C_2$. Группа A примитивна.

Пусть H и K - гр., действующие на Γ и Δ соотв. $\Omega = Fun(\Gamma, \Delta)$, $G = K \wr H$, где H действ. на $|\Gamma|$ копий K, т.е. $G = Fun(\Gamma, K) \rtimes H$.

Определим действие G на Ω по правилу:

$\forall \omega \in \Omega$ ~~$\forall g \in$~~ $(f, x) \in G$: $(\omega^{(f,x)})(\gamma) = \omega(\gamma^{x^{-1}})^{f_{\gamma x^{-1}}}$.

Такое действие наз. product action.

$(\alpha_1 \dots \alpha_m)^{(f_1 \dots f_m)} = (\alpha_1^{f_1} \dots \alpha_m^{f_m})$.

$(\alpha_1 \dots \alpha_m)^{x} = (\alpha_{1x^{-1}}, \dots, \alpha_{mx^{-1}})$.

$(\alpha_1 \dots \alpha_m)^{(f_1 \dots f_m)x} = (\alpha_{1x^{-1}}^{f_{1x^{-1}}}, \dots, \alpha_{mx^{-1}}^{f_{mx^{-1}}})$.

Проверим корректность:

$\omega^{(1,e)} = \omega$.

$(f, x)(g, y) = (f g^{x^{-1}}, xy)$. ~~Заметим, что если $\gamma \in \Gamma$, то γ^{xy}~~

$\omega_{\gamma^{xy}}^{(f,x)(g,y)} = \omega_{\gamma^x}^{(f,x) g_{\gamma^x}} = \omega_\gamma^{f_\gamma g_{\gamma^x}}$.

$\omega_{\gamma^{xy}}^{(f g^{x^{-1}}, xy)} = \omega_\gamma^{(f g^{x^{-1}})_\gamma} = \omega_\gamma^{f_\gamma g^{x^{-1}}_\gamma} = \omega_\gamma^{f_\gamma g_{\gamma^x}}$ //

Значит это действие.

Действие G на Ω точное $\Leftrightarrow$ действия H и K точные.

Если $|\Gamma|$ и $|\Delta|$ конечные, ~~$|\Omega|^{|\Gamma|}$~~ $|\Omega| = |\Delta|^{|\Gamma|}$,

$|G| = |K|^{|\Gamma|} \cdot |H|$ (H и K конечные).

Д/з 2.7.1 2.7.2

Пусть $H \leq Sym(\Gamma)$, $K \leq Sym(\Delta)$, и $G = K \wr H$ - прим. подгруппа $Sym(\Omega)$, $\Omega = Fun(\Gamma, \Delta)$ тогда и только тогда, когда: 16^{30}

1) K - примитивна, но не регулярна на Δ.

2) H - транзитивна на Γ, и Γ - конечно.

Аффинно-регулярные группы.

F - поле. $\Omega = F$. $g_{\sigma\alpha\beta}$ - ж.ч., где $\sigma \in Aut(F)$, $\alpha \in F \setminus \{0\}$, $\beta \in F$. $g_{\sigma\alpha\beta} : \xi \longmapsto \xi^\sigma \alpha + \beta$, $G = \{g_{\sigma\alpha\beta}\}$

$t_\beta = g_{e,1,\beta}$ - сдвиги, $l_\alpha = g_{e,\alpha,0}$ - гомотетии.

$\gamma_\sigma = g_{\sigma,1,0}$. $T = \{t_\beta\}$, $L = \{l_\alpha\}$, $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}$.

$G = A\Gamma L_1(F)$ – одн. афф.-лин. гр.

$G \le Sym(\Omega)$ $A = TL = \{g_{e,\alpha,\beta}\} \trianglelefteq G$, $A = AGL_1(F)$.

$G = A \rtimes \Gamma$. $T \trianglelefteq G$, $A = T \rtimes L$. $L = GL_1(F)$.

$L\Gamma = \Gamma L_1(F)$. T – регулярная подгруппа в G.

F – поле. $\Omega = V = F^d$ – век. пр-во.

$g_{\sigma A v}: x \longmapsto x^{\sigma}A + v$, где $\sigma \in Aut(F)$, $A \in GL_d(F)$, $v \in V$. $G = \{g_{\sigma A v}\} = A\Gamma L_d(F)$ – d-мерная полулинейная группа афф. над F.

T – гр. сдвигов, L – гр. преобр. (т.е. $GL_d(F)$),

Γ = гр. авт. (т.е. $\Gamma = Aut(F)$). $A = TL = AGL_d(F)$

$G = A \rtimes \Gamma$, $T \trianglelefteq G$, $A = T \rtimes L$. T – рег. подгрупп.

Аффинная геометрия: $P = V$ – точки.

S – k-мер. плоскость, если $S = U + v$, где U – k-мер. подпр-во в V, $v \in V$. $AG_d(F)$ – соотв. афф. геометрия. $H = Aut(AG_d(F))$.

Если $d \geq 2$, то $H = A\Gamma L_d(F)$.

◄ 1) $A\Gamma L_d(F) \le H$.

2) $x \in Sym(\Omega)$, x переводит прямые в прямые. Тогда $x \in H$, $\exists A \in GL_d(F)$ и $\exists v \in V$: $y = x^{-1} g_{e,A,v}$, причём y оставляет на месте $0, e_1, \dots, e_d$.

3) $\exists \sigma \in Aut(F)$: $y = g_{\sigma,e,0}$.

y ост. на месте $\langle e_1 \rangle$ $\Rightarrow$ действ. на поле. ►

$PGL_d(F) = GL_d(F) / Z(GL_d(F))$ – проективная гр.

$d=2$: $\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} t_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $t_{\alpha\beta\gamma\delta} : \xi \longmapsto \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$,

$\xi \in \Omega = F \cup \{\infty\}$. $G = \{t_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$.

$\varphi : GL_d(F) \xrightarrow{\text{на}} G$, $\ker \varphi = Z(GL_d(F))$, т.е.

$G \cong PGL_2(F)$. $G_{\infty} = AGL_1(F)$, $G_{\infty,0} = GL_1(F)$.

~~Проективное пр-во~~: $GL_d(F)$ действует на $\Omega = F^d \setminus \{0\}$. Λ – система импримитивности: $u \sim_{\Lambda} v \Leftrightarrow u = \alpha v$, $\alpha \in F \setminus \{0\}$. Если $|F| = q$, то $|\Lambda| = \frac{q^d - 1}{q-1}$. $GL_d(F)$ действует на Λ с ядром $Z(GL_d(F))$. Значит $PGL_d(F)$ точно действует на Λ.

Проективная геометрия: $PG_{d-1}(F)$:   ДЗ п.2.8.

точки = 1-мер. пр-ва в $V = F^d$. $(k-1)$-мер. плоскости = k-мер. подпр-ва в V.

Если $d \geq 3$, то $Aut(PG_{d-1}(F)) = PGL_d(F)$.

◄ Упр. ►

Теорема О'Нана–Скотта.

$G \le S_n$. Тогда G – подгруппа одной из

след. собственных подгрупп S_n из зад. списка 1.

Список 1 включает в себя все макс. подгруппы гр. S_n. Будем считать, что $n \geq 5$.

Если $G \in$ Список 1, то либо G - макс. в S_n, либо $G \leq M \leq S_n$, где (G, M, n) содерж. в Списке 2.

Если G - прим. подгр. в S_n, то G подстановочно-изоморфна гр. из Списка 3.

$n \geq 3$, $|\Omega| = n$, $S = S_n$, $A = A_n$, $X \in \{S, A\}$.

$G \leq S_n$.

а) G - интранзитивна.

◄ $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_t$, $t \geq 2$. По следствию из т. Ремака, $G \hookrightarrow Sym(\Omega_1) \times \ldots \times Sym(\Omega_t)$.

Если G - максимальная, то $t = 2$ (т.к. иначе $G < Sym(\Omega_1) \times Sym(\Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_t)$).

$\Omega = \Delta \cup \Gamma$ - орбиты G. $|\Delta| = k$, $|\Gamma| = m$.

Докажем, что если $k > m$, то ~~G максималь~~ $H = S_k \times S_m$ - макс. в S. $H < M < S$. $x \in M - H$.

$\exists \alpha, \beta \in \Delta$: $\alpha^x \in \Delta$, $\beta^x \in \Gamma$. $(\alpha, \beta) \in H \Rightarrow (\alpha, \beta)^x = (\alpha^x, \beta^x) \in M$. Эл-ми из H можно получить $\alpha^{xh} \in \Delta$ (для любого) и $\beta^{xh} \in \Gamma$

$\Rightarrow$ все транспозиции $(\alpha, \beta) \in M$, $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Gamma$.

$\Rightarrow M = S$ - противоречие.

Заметим, что $H \cap A \leq_{max} A$. $H \cap A < M < A$.

$x \in M - H \cap A$. $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha^x \in \Delta$, $\beta^x \in \Gamma$. Можно считать, что $|\Delta| \geq 3$. $\underset{}{\gamma} \overset{\neq \alpha, \beta}{\in} \Delta$. Если $\gamma^x \in \Delta$, то $(\underset{\in\Delta}{\alpha^x}\underset{\in\Delta}{\gamma^x}\underset{\in\Gamma}{\beta^x}) \xrightarrow{\text{можно}} (\alpha, \gamma, \omega)$, $\omega \in \Gamma \Rightarrow$ все циклы есть в $M \Rightarrow$ противоречие. Если $\forall \gamma \in \Delta - \{\alpha, \beta\}$: $\gamma^x \notin \Delta$, то всё тоже решается.

Пусть теперь $k = m$. $H = S_k \times S_k$. Гр. H - не макс. в S_n, т.к. $H < S_k \wr C_2 \leq S_n$.

Группа $S_k \wr S_2$ максимальна в S_n (как раньше в пункте про $k > m$). ►

б) G - транзитивна, но импримитивна.

◄ $\Omega = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$ - блоки. $m \geq 2$, $|\Delta_i| = k \geq 2$.

Тогда $G \hookrightarrow S_k \wr S_m$.

Упр. 1) $S_k \wr S_m \leq_{max} S_{km}$ 2) $S_k \wr S_m \cap A \leq_{max} A \Leftrightarrow$ ДЗ ►

$\Leftrightarrow (k, m) \neq (2, 4)$.

Итак, мы свели всё к примитивному случаю.

$G < S_n = S$, $C_S(G)$ — транзитивен $\Rightarrow$ G — полурегулярна, т.е. $G_\alpha = 1$ $\forall \alpha \in \Omega$. Если G абелева и транзитивна, то G регулярна. Если G — регулярна, то $|G| = |\Omega|$.

$N \trianglelefteq_{min} G_\alpha \Rightarrow N = S_1 \times \ldots \times S_t$, S_i — простые, $S_i \cong S_j$.

Лемма.

G — примитивная гр., $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ — нетривиальные, $[N_1, N_2] = 1$. Тогда $C_G(N_1) = N_2$, $C_G(N_2) = N_1$. В частности, в ~~прим~~ G не более двух мин. норм. подгрупп (если ~~N~~ сама абелева, то вообще одна).

◀ $N_2 \le C_G(N_1)$. N_2 — транз. $\Rightarrow$ $C_G(N_1)$ — транз. $\Rightarrow$ N_1 — полурегулярна $\Rightarrow$ ~~...~~ N_1 — регулярна.

$M \in C_G(C_G(N_1))$ $C_G(N_1)$ — регулярна $\Rightarrow$ ~~...~~ $N_2 = C_G(N_1)$. ▶

б) G — примитивна, $N \trianglelefteq_{min} G$, N — абелева.

◀ N — регулярная. $\Rightarrow$ $G = N \rtimes K$, где $K = G_\alpha$, причём можно отождествить Ω и N ~~где~~ и $x^{(n,k)} = x^k \cdot n$. $N = \mathbb{Z}_p^m$, $C_G(N) = N$. Значит $K \hookrightarrow GL_m(p) \Rightarrow G \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^m \rtimes GL_m(p) = AGL_m(p)$.

Дз Упр. Когда $AGL_m(p)$ макс.? В S — всегда, в A есть исключение. ▶

$H = (S_2 \wr S_4) \cap A_8$ — не макс. в A_8. $H \cong 2^3 \rtimes S_4 \le AGL_3(2)_1$ — уже примитивная.

$L = Soc(G) = \langle M \mid M \trianglelefteq_{min} G \rangle$ — цоколь.

Лемма'.

G — прим. гр. Тогда либо L — рег. эл. аб. p-гр., ~~G~~ $C_G(L) = L$ — ед. мин. норм.; либо L — ед. мин. норм., L — неаб., $C_G(L) = 1$; либо $L = K \times C$, где $K, C \trianglelefteq_{min} G$, $K \cong C$ — неаб.

◀ Докажем, что в посл. случае $K \cong C$. L — транзитивна. $L = KL_\alpha = CL_\alpha$. $L_\alpha \cong \frac{L_\alpha}{L_\alpha \cap K} \cong \frac{KL_\alpha}{K} = L/K \cong C \Rightarrow C \cong L_\alpha \cong K$. ▶

Лемма.

G — примитивна, L — регулярная. Тогда: $L \le G \le N_S(L)$, $G = L \rtimes K$, K — стаб. точки, K — неприводима как подгр. $Aut(L)$, (в L нет нетрив. K-инв. подгр.).

◀ $1 < U < L$, U — K-инв. $\Rightarrow$ $UK < G$ — прот. ▶

Теорема.

$G \le Sym(\Omega)$, $Soc(G)$ — абелева. Тогда G — прим. $\Longleftrightarrow$ $|\Omega| = n = p^d$, p — простое, G — подгр. из $AGL_d(p)$ такая, что G — транз. G_α — неприв. в $GL_d(p)$.

◀ $\Rightarrow$): из пред. леммы.

$\Leftarrow$: Допустим, что G имприм., Σ-система имприм. U-блок этой системы в Ω сод. 1-у. U — подгруппа L. ?

г) G-примитивна, $Soc(G)$ — неабелев.

Тип AS: $Soc(G) = T$ — простая. $\Rightarrow T \leq G \leq Aut(T)$.

G-почти простая гр. G_α — макс. в G.

Лемма.

Пусть G — прим., $L = Soc(G)$ — неаб., $L = T_1 \times \ldots \times T_k$, L — регулярна. Тогда G_α не сод. норм. разр. подгрупп. В частности, $k > 1$.

◀ От противного. Сущ. $P \trianglelefteq_{min} G_\alpha$, P — эл. аб. p-группа. Т.к. G прим., то $N_G(P) = G_\alpha$. $C_L(P) = C_G(P) \cap L \leq G_\alpha \cap L = 1$. Рассмотрим действие P на L сопряжениями: есть ровно одна ед. орбита, а остальные — p-числа. $\Rightarrow |L| \equiv_p 1$. Пусть $q \mid |L|$. Тогда $\exists Q \in Syl_q(L)$: $P \leq N_G(Q)$. Докажем, что Q — ед. силовская q-подгр. норм-ая P. Пусть

$u \in L$ Q^u — другая такая. $\Rightarrow P^{u^{-1}} \leq N_G(Q)$. Заметим,

что P и $P^{u^{-1}}$ — силовские p-г. в $N_{LP}(Q)$. Значит $\exists v \in L \cap N_{LP}(Q)$: $P^{u^{-1}v^{-1}} = P \Rightarrow vu \in N_G(P) = G_\alpha$, $vu \in L \Rightarrow vu = 1 \Rightarrow u \in N_{LP}(Q) \Rightarrow Q = Q^u$ — противоречие. $z \in N_G(P)_\alpha \Rightarrow Q^z$ норм-т $P^z = P \Rightarrow$ $Q^z = Q \Rightarrow G_\alpha \leq N_G(Q) \Rightarrow QG_\alpha = G$ — противоречие с $Soc(G)$ — неаб. ▶

Как следствие, в AS $G_\alpha \cap T > 1$.

Группы диагонального типа.

T-рег. подгруппа в $Sym(T)$. $T_r = \{t_r : x \mapsto xt\}$ $= T$ — подгруппа правых сдвигов. $T_\ell = \{t_\ell : x \mapsto t^{-1}x\}$. $= C_S(T)$. $N_S(T) = Hol(T) = T \rtimes Aut(T)$.

$L = T \rtimes Inn(T)_\alpha = \langle T_\ell \times T_r \rangle$. Если $Z(T) = 1$, то $L = T_\ell \times T_r$.

Действительно, $T_\ell \cap T_r = Z(T_\ell) = Z(T_r)$, т.е. п. 2-ой следует из $L = \langle T_\ell, T_r \rangle_\alpha \in \{x^{t_\ell} = t^{-1}x = x^t \cdot t^{-1} = (x^{t_r})^{t_r^{-1}}\}$, т.е. x^t выр. через t_r^{-1} и t_ℓ.

$L \leq N$, L — транзитивна. $L \leq G \leq N$. Когда G — примитивна? $G = T \rtimes H$, $Inn(T) \leq H \leq Aut(T)$. $1 < U < T$ и U — H-инв. $\Leftrightarrow$ G — имприм. Пусть T — неабелева простая. Тогда $Soc(G) = T_\ell \times T_r$. Значит такой гр. U нет $\Rightarrow$ G — примитивна.

а) T — пр. неаб. прост., $L = Soc(G) = T_\ell \times T_r$, $N = N_S(T)$, $L \leq G \leq N$. Это гр. диаг. типа.

$\sigma \in Sym(T)$. $\sigma: t \mapsto t^{-1}$. $T_r^{\sigma} = T_\ell$. $\langle N, \sigma \rangle \Rightarrow$
$\sigma \notin N$. $\langle N, \sigma \rangle \overset{?}{=} S_k$? Нет, т.к. $L \trianglelefteq \langle N, \sigma \rangle$, но $\ell \notin Aut(T)$. $M = \langle N, \sigma \rangle$. $M = N_S(L)$. Действительно $\sigma \in M$. Если $\varphi \in M$ меняет T_r и T_ℓ местами, то $\varphi\sigma \in N \Rightarrow M = \langle N, \sigma \rangle$.

$x^{(a_1, a_2)} =$

$N = T \rtimes Aut(T) = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in Aut(T), Ta_1 = Ta_2\}$.
$L = T_1 \times \ldots \times T_k$, $T_i \cong T$ - неаб. прост. $N = \{(a_1 \ldots a_k) \mid a_i \in Aut(T), Ta_i = Ta_j\}$, $N_1 = \{(a, \ldots a) \mid a \in Aut(T)\}$.
$|N : N_1| = \frac{|T|^k |Out(T)|}{|T| \cdot |Out(T)|} = |T|^{k-1}$. Если $k = 2$, то гр. примитивна, а если $k > 2$, то импримитивна. $W = N \rtimes S_k$. В W только одна мин. норм. п/г-а L. $W_1 = \{(a, \ldots, a, x)\} = Aut(T) \times S_k$.

б) T - неабелева простая, $Soc(G) = T_1 \times \ldots \times T_k$, $T_i \cong T$, $k \geq 2$. $L \leq G \leq W$, G^{Γ} - прим. гр. $\Rightarrow$ G - примитивна.

Скрученное сплетение.

T, H - произв. группы. $Q \leq H$ и $\varphi: Q \to Aut(T)$ - гомоморфизм. R - левая трансверсаль Q в H. $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$.

$F = Fun(H, T)$ - группа отн. поточечного умн. $f^h(x) = f(hx)$ - действие H на F. Обозначим:

$L = \{f \in F \mid f(xy) = f(x)^{\varphi(y)}, x \in H, y \in Q\}$. $G = L \rtimes H$.

Лемма.

$L \leq F$, $L^H = L$, $|L| = |T|^m = |T|^{|H:Q|}$.

◀ $(f_1 f_2)(xy) = f_1(xy) f_2(xy) = f_1(x)^{\varphi(y)} f_2(x)^{\varphi(y)} = ((f_1 f_2)(x))^{\varphi(y)}$
$\Rightarrow f_1 f_2 \in L$, если $f_i \in L$.

$f \in L$. $f^h(xy) = f(hxy) = f(hx)^{\varphi(y)} = (f^h(x))^{\varphi(y)}$
$\Rightarrow f^h \in L$.

$f(1) = t$. $y \in Q$. $f(y) = f(1 \cdot y) = t^{\varphi(y)}$, т.е. значение f на Q определяется $f(1)$.

$f(r_i) = t_i$. $f(r_i y) = t_i^{\varphi(y)}$ $\Rightarrow$ f определяется действием на R. ▶

G - скрученное сплетение, T - неаб. прост., $L = T_1 \times \ldots \times T_k$, $T \cong T_i$, $H \leq Sym(\Gamma)$, H - прим. $Q = H_1$ = стаб. T_1 в H. $\varphi: Q \to Aut(T)$. Потребуем, что $Im\, \varphi \geq Inn(T)$ (необх. усл.), $Im(\varphi)$ не явл. гом. обр.-ом H (дост. усл.). Тогда G - примитивна и наз. скруч. спл. Самый мал. пример: $T = A_5$, $k = 6$, $H = A_6$, т.е. $(A_5 \times \ldots \times A_5) \rtimes A_6$.

ДЗ Для любой неаб. пр. T сущ.

прим. структ. сплетение с ~~$Soc(T)$~~ цоколем $T^{|T|}$.

Δ, Γ. $K \le Sym(\Delta)$, $H \le Sym(\Gamma)$, $\Omega = Fun(\Gamma, \Delta)$.

$G = K \wr_\Gamma H$ — прим. сплетение. G-примитивна $\iff$ K-примитивна, но не регулярна, а H-транзитивна.

В нашем случае: а) K-почти простая.

$Soc(G) = T_1 \times \dots \times T_k$, $T \le K \le Aut(T)$, $T_i \cong T$.

б) K-диагон. типа

Лемма.

$G \trianglerighteq L$, $H \le_{max} G$. Тогда $L \cap H$ — макс. H-инв. подгруппа в L.

$L \not\le H$

◀ $L \cap H < M \le L$, M — H-инвариантна. $MH \le G$ причём $MH = G$. $|MH| = |M| \cdot \frac{|H|}{|M \cap H|} = |M| \cdot \frac{|H|}{|L \cap H|}$ и $|MH| = |G| = |LH| = |L| \cdot \frac{|H|}{|L \cap H|} \Rightarrow |M| = |L| \Rightarrow M = L \Rightarrow L \in H$ — противоречие. ▶

Следствие:

Если G-примитивная, $L \trianglelefteq G$, то L_α — максимальная G_α-инв. подгруппа L.

Возвращаемся к док-ву теоремы.

$S = Sym(\Omega)$, $G \le S$ — прим., T — неаб. прост.,

$L = Soc(G) = T_1 \times \dots \times T_k$, $k \ge 2$, $T_i \cong T$. $H = G_\alpha$, $\Sigma = \{T_1, \dots, T_k\}$.

$N = N_S(L) \ge G$. Тогда N тоже примитивная.

$\pi_i : L \to T_i$ — проекция. $R_i = \pi_i(L_\alpha) \le T_i$.

$K = R_1 \times \dots \times R_k$. $L \trianglelefteq N \Rightarrow L$ — транзитивна $\Rightarrow$

$N = L N_\alpha$, $G = L G_\alpha$. L будет мин. норм. подгруппой в $N \Rightarrow N$ действует транзитивно сопр. на $\Sigma \Rightarrow N_\alpha$ действ. транз. на Σ.

$\forall u \in L$ $\forall x \in N$: $\pi_i(u^x) = \pi_j(u)^x$, где $T_i^x = T_j$.

Если $x \in N_\alpha$, $T_i^x = T_j$, то $R_i^x = R_j$. Значит K — N_α-инвариантна, $L_\alpha \le K \le L \trianglelefteq N \Rightarrow$ по лемме, либо $L_\alpha = K$, либо $K = L$.

Случай $L_\alpha = K < L$:

$R_1 < T_1 \Rightarrow$ все $R_i < T_i$. (более того, $\overbrace{|T_i : R_i|}^{d} = \text{const}$).

Если $R_1 = 1$, то $K = 1 \Rightarrow L_\alpha = 1 \Rightarrow L$ — норм. рег.

Пусть $R_1 \ne 1$. $\varphi_1 : T_1 \to T$, $R = R_1^{\varphi_1}$, $\varphi_i : T_i \to T$, причём $R = R_i^{\varphi_i}$. $\Delta = \{Rt \mid t \in T\}$. $\Omega' = \Delta^k$.

$(t_1, \dots, t_k)$ действует на Ω'. ~~...~~ $\Omega = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_k$

Δ_i — см. классы T_i по R_i. $|\Omega| = |L : L_\alpha| = d^k$.

$M = N_{Sym(\Delta)}(T)$, $W = M \wr S_k$ д. точно на $\Omega = \Delta^k$. как пр. сплетение

$L \trianglelefteq W \Rightarrow W \leq N$. Докажем, что $W = N$.

т.к. W действ. на Σ как S_k.

$W < M_1 \times \ldots \times M_k \rtimes S_k$

$\forall x \in N \ \exists y \in W : z = xy^{-1}$ действ. на Σ тождественно

В частности, $T_i^z = T_i \ \forall i \Rightarrow R_i^z = R_i \leq T_i \Rightarrow$

$\exists m_i \in M_i : R_i^{m_i} = R_i^z \Rightarrow z = m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$ т.к. ост. все точки на месте $\Rightarrow z \in M_1 \times \ldots \times M_k \Rightarrow W = N$.

Итак: $L \trianglelefteq G$. Из т. о прим. сплетениях, M — прим. на $\Delta \Leftrightarrow N$ — прим. $Soc(M) \geq T$ — не рег. $\Rightarrow$ единств. норм. подгруппа $M \Rightarrow$ $T = Soc(M) \Rightarrow T \leq M \leq Aut(T)$. Но M — примитивна $\Rightarrow M_\alpha$ — макс. в $M \Rightarrow T_\alpha$ — макс. в T.

Случай $K = L$:

$R_i = T_i$. $\Rightarrow L_\alpha$ — подпрямое пр. $T_1 \times \ldots \times T_k$.

Пусть $k = 2$. $L_\alpha \leq T_1 \times T_2$. $K_i = L_\alpha \cap \ker \pi_i$

$\Rightarrow K_1 = L_\alpha \cap T_2$, $K_2 = L_\alpha \cap T_1$. $K_1 \trianglelefteq T_2$, $K_2 \trianglelefteq T_1$

$\Rightarrow$ либо $L_\alpha \simeq T$, либо $T_1 \times T_2$ — второе невозможно

$\Rightarrow L_\alpha \simeq T$, $K_1 = K_2 = 1$.

k — любое. $L_\alpha / K_i \simeq \pi_i(L_\alpha) \simeq T$. Перенумеруем K_i так, что $K_1, \ldots, K_l$ — все различные в L_α.

Д/з Тогда $L_\alpha = D_1 \times \ldots \times D_l$, где $D_i \simeq T$.

Пусть $l = 1$. $L_\alpha \simeq T$. $|\Omega| = |G : G_\alpha| = |L : L_\alpha| = |T|^{k-1}$.

$D = \{(t, \ldots, t) \mid t \in T\} \leq L$. $L_\alpha \to E = \{(t^{\varphi_1}, t^{\varphi_2}, \ldots, t^{\varphi_k})\}$

$\varphi_i : T \to T_i$ — изоморфизмы. $\overbrace{\{Dl \mid \ldots\}}^{\Omega} \to \overbrace{\{El \mid \ldots\}}^{\Omega'}$.

$D(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, 1) \xrightarrow{\sigma} E(t_1^{\varphi_1}, \ldots, t_{k-1}^{\varphi_{k-1}}, 1)$.

$\psi : (t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k) \longrightarrow (t_1^{\varphi_1}, \ldots, t_{k-1}^{\varphi_{k-1}}, t_k)$ — из. групп.

ψ будет подст. из. отн. σ.

Т.е. можно считать, что действие экв. действию на см. классах D в L. Пусть $W = N_{Sym(\Omega)}(L) = N$. $N = L N_\alpha$. $N \in (T \wr S_k) Out(T)$.

В какой мы ситуации:

$L = Soc(G) \simeq T_1 \times \ldots \times T_k$, $T_i \simeq T$ — прост. $G_\alpha \cap L = R$, $R_i = \pi_i(R) \leq T_i$

R — макс. G_α-инв. подгруппа в L.

$1 < R_1 < T_1 \Rightarrow R_1 \cdot \ldots \cdot R_k$ — G_α-инв. $\Rightarrow R = R_1 \cdot \ldots \cdot R_k$.

$\Rightarrow$ это всё было (product action).

$R_1 = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow L$ — регулярная подгруппа.

$\Rightarrow G = L \rtimes G_\alpha$. В этой ситуации, G_α не содержит норм. разл. подгрупп.

Докажем, что $G \simeq T_1 \operatorname{twr} G_\alpha$. $N = N_G(T_1)$,

$C = C_G(T_1)$. $\varphi : N_\alpha \to Aut(T_1)$. $\varphi(n) : t \mapsto t^n$.

$\Sigma = \{T_1, \ldots, T_k\}$. $G \hookrightarrow G^\Sigma$, т.к. G действ. сопр. на Σ. Заметим $C_G(L) = 1$, $L \trianglelefteq_{min} G$. ~~Из этого~~

$\psi : G \to G^{\Sigma}$, $K = \ker \psi$, $L \leq K \leq \mathrm{Aut}(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(T_k)$

$K/L \leq \mathrm{Out}(T_1) \times \ldots \times \mathrm{Out}(T_k)$ – разрешима.

$\frac{(K \cap G_\alpha)L}{L} \simeq K \cap G_\alpha$ – норм. разреш. Значит G_α действ. на Σ точно и транзитивно. $P = G_\alpha$, $P^{\Sigma} \leq \mathrm{Sym}(\Sigma)$. $T_i^{p} = T_{ip}$.

$Q = N_\alpha$. $Q^{\Sigma} = \mathrm{Stab}_{T_1}(P^{\Sigma})$, $|G_\alpha : Q| = k$.

Зафикс. c_i, $i = 1 \ldots k$: $T_i^{c_i} = T_1$. $P = Qc_1 \cup \ldots \cup Qc_k$.

$F = \mathrm{Fun}(P, T_1)$. $F \rtimes P$, где $f^{p}(x) = f(px)$.

$B \leq F$, $f \in B \Leftrightarrow f(pq) = f(p)^{\psi(q)}$. $B \simeq \mathrm{Fun}(\Sigma, T_1)$.

$|B| = |T_1|^{k}$. $T_1 \,\mathrm{wr}_\psi\, P^{\Sigma} \overset{def}{=} B \rtimes P$. Докажем, что $B \rtimes P \geq G$.

$x \in L \Rightarrow x = \prod_{i=1}^{k} a_i$. $\forall i = 1..k$: $a_i^{c_i} \in T_1 \Rightarrow$ $\prod_{i=1}^{k} a_i^{c_i} \in T_1$. $\theta : G \to T_1 \,\mathrm{wr}_\psi\, P$. $\theta(xu) = \theta_x u$, $u \in P$, $x \in L$, $x = \prod_{i=1}^{k} a_i$, $a_i \in T_i$. $\theta_x(c_i q) = a_i^{c_i q} \in T_1$.

$\Rightarrow \theta_x \in F$. $\theta_x(c_i) = a_i^{c_i}$, $\theta_x(c_i q) = \theta_x(c_i)^{\psi(q)}$, но $\psi(q)$ – сопряжение, т.е. $\theta_x \in B$. $\theta_x \neq \theta_y$ при $x \neq y$. $\theta_\cdot : L \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B_\alpha \Rightarrow$ θ – биекция.

$x = \prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_{iu}$ $\quad \theta_{x^u} \overset{?}{=} \theta_x^{u}$. $\theta_{x^u}(c_i q) = (\underbrace{a_{iu^{-1}}^{u}}_{\in T_i})^{c_i q} = a_{iu^{-1}}^{uc_i q}$.

$b = \theta_x$. $b^u(c_i q) = b(uc_i q) = b(c_{iu^{-1}} \underbrace{c_{iu^{-1}}^{-1} u c_i}_{\in Q} q) = a_{iu^{-1}}^{uc_i q} = \theta_{x^u}(c_i q)$, т.е. θ – гомоморфизм.

Докажем, что $\mathrm{Im}\,\varphi \geq \mathrm{Inn}(T_1) \simeq T_1$. $C \trianglelefteq N$.

$T_2 \ldots T_k \leq C$. $T_1 \cap C = 1$. $T_1 C \geq L$. $G = L \rtimes G_\alpha$.

$\Rightarrow L \leq N \Rightarrow N = LN_\alpha$, т.к. N – транзитивна.

$N = T_1 C N_\alpha$, $K = CN_\alpha$. Допустим, что $K = N$.

Тогда $T_1 \simeq LC/C \trianglelefteq N/C = CN_\alpha/C \simeq N_\alpha/(C \cap N_\alpha)$, т.е. T_1 – секция N_α. Допустим, что $K < N$.

$\underbrace{K \cap T_1}_{R_1} < T_1 \Rightarrow R_1 = K \cap T_1$ – N_α-инв.-а. $R_1 \cdot \ldots \cdot R_k$ – G_α-инвариантна. Но в L нет таких подгрупп, т.е. $K \cap T_1 = 1_n \Rightarrow N = T_1 \rtimes K$. Гр. N действ. пр. сдвигами на см. кл. по K, пусть $\tilde{N}$ – гр. подст. на $\{Kn_1, \ldots\}$.

$\tilde{T}_1$ – норм. рег. подгр. в $\tilde{N}$. $C_{\tilde{N}}(\tilde{T}_1) = 1$.

Тогда C лежит в ядре д. $\Rightarrow$ $K = N_\alpha$.

K – разр. Т.к. T_1 – простая, $\tilde{N}$ – прим. $\Rightarrow$ N_α не может быть разреш. $\Rightarrow$ противоречие.

$C_{\tilde{N}}(\tilde{T}_1) \simeq T_{1\alpha} \Rightarrow \tilde{N} \simeq T_1 \cdot N_\alpha \Rightarrow N_\alpha$ сод. $\simeq T_1$. лемма 4.7 из. док – дост. условие

Теперь случай $R_1 = T_1 \Rightarrow \forall i : R_i = T_i$.

$K_i = \ker \pi_i \cap L_\alpha$. $L_\alpha / K_i \simeq T_i$. $i, j \in \Sigma$. $i \sim j \overset{def}{\Longleftrightarrow} K_i = K_j = K_i \cap K_j$

$\Sigma = \bigsqcup_{i=1}^{l} \Delta_i$, $\Delta = \Delta_1$. $U = T_1 \times \ldots \times T_m$, где $\Delta_1 = \{1 \ldots m\}$. ?

$L_\alpha \cap U \trianglelefteq$ $\frac{L_\alpha}{\bigcap_{i \in \Delta_1} K_i} \simeq L_\alpha / K_1 \simeq T$.

$L \simeq \prod_{i=1}^{m} V_i$, $V_i \simeq T$, $k = l \cdot m$, $m > 1$ (иначе $L_\alpha = L$).

Случай $l = 1$:

$\Rightarrow k_i = k_j \ \forall i,j \Rightarrow \forall i: k_i = 1 \Rightarrow L_\alpha \simeq T$. $|L| = |T|^k$

$\Rightarrow |\Omega| = |L : L_\alpha| = |T|^{k-1}$. $\psi : L_\alpha \leftrightarrow T$ – изоморф.

$\psi_i = \psi \circ \pi_i : T \to T_i$ – изоморфизм. $L' = T^k$.

$L' \xrightarrow{\varphi} L$, $\varphi(t_1 \ldots t_k) = \{\psi_1(t_1); \ldots; \psi_k(t_k)\} \in L$.

$\overbrace{\Omega'}$ L'/D и L/L_α $\quad \varphi(\underbrace{t, \ldots, t}_{\in D}) = \psi_1(t) \cdot \ldots \cdot \psi_k(t) \in L_\alpha$. Т.е. φ –

подстановочный изоморфизм L' и L.

$G \leq N_S(L) = N_1 \xrightarrow{\varphi^{-1}} N_{Sym(\Omega')}(L')$, т.е. G – гр. диаго-

ДЗ §4.5 с.121-124. нального типа. Она примитивна, если $k \geq 2$ и G^Σ прим. на Σ.

Случай $l > 1$:

$\Sigma = \bigsqcup_{i=1}^{l} \Lambda_i$, $|\Lambda_i| = |\Lambda_j|$, $\Lambda = \Lambda_1 = \{1 \ldots m\}$.

$U = U_1 = T_1 \ldots T_m$. $L = \prod_{i=1}^{l} U_i$. $L_\alpha = \prod_{i=1}^{l} V_i$, где

$V_i \leq U_i$, $V_i \simeq T$. $\pi_i(V_i) \simeq T$. $\Delta = \Delta_1 = (U : V)$,

$|\Delta_1| = |T|^{m-1}$. $M = N_{Sym(\Delta)}(U)$ – примитивная

гр. диагонального типа (как при $l = 1$).

$G_\Delta \leq M \Rightarrow$ тоже гр. диаг. типа.

$\Gamma = \{\Lambda_i | \ldots\}$ $\quad \Omega' = \Delta^l$. На Ω' действует как прим. спл.

$M \wr_\Gamma S_l$. Утверждается, что $G \hookrightarrow M \wr_\Gamma S_l$,

причём $U_1 \ldots U_l \leq$ в этом вложении.

Теорема О'Нана–Скотта доказана.

Если G – прим. гр., $L = Soc(G)$. Тогда:

а) $L_\alpha \neq 1 \Rightarrow L = T^{l \cdot m} \trianglelefteq G \leq ((T \wr S_m) Out(T)) \wr S_l$

$l = m = 1 \Rightarrow G$ – почти простая.

$l = 1 \Rightarrow G$ – диагональная

$l > 1 \Rightarrow G$ – прим. сплет. $\quad$ $m = 1 \Rightarrow$ почти простых; $m > 1 \Rightarrow$ гр. диаг. типа.

б) $L_\alpha = 1 \Rightarrow$

- G – скруч. сплетение.
- L – эл. аб. p-группа пор-ка p^d, $G = L \rtimes H$, H – неприв. подгр. в $GL_d(p)$.

ДЗ Док-ть, что транз. подгр. в S_p либо 2-транз., либо $< AGL_1(p)$.

Блоки непр. лин. группы и прим. афф. гр. подстановок.

$H \leq GL(V)$ и H неприводима, т.е. нет H-инв. подпр-в $0 < U < V$. Подпр-во $U \leq V$ наз. H-блоком, если $V = \bigoplus_{h \in H} U^h$ (слагаемые могут повторяться). Группа H наз. примитивной, если её единственный блок – V.

Упр. $H \le GL_2(p)$, $p>3$. H – мономиальные м-цы с $\det = \pm 1$. Тогда H – неприводима и импримитивна.

Пусть $K \le GL(U)$ и $R \le Sym(\Gamma)$, $|\Gamma| = k$. $V = U^k = U^\Gamma$ – в.п. над тем же полем. Пусть $H = K \wr_r R$ – product action, действ. на V. H наз. сплетением лин. группы с группой подстановок. ~~Тогда:~~

~~1)~~ $|\Gamma| \ge 2$, H – сплет. Тогда:

1) $H \le GL(V)$

2) Если K-непр., $|U| \ne 2$, R-транз., то H неприводима и импримитивна.

◀ 1) Прямая проверка.

2) U-блок, непр.-ть следует из т. о prod.act. ▶

G – прим. афф. гр. из $Sym(\Omega)_n \Rightarrow Soc(G)$ – мин. норм. в $G \Rightarrow G = L \rtimes G_\alpha$, $L = C_p^d$ – рег. Тогда сущ. из. влож. $i: G \to AGL_d(p) = AGL(V)$, где V – d-мерное век. пр-во над $\mathbb{F}_p$. При этом $L \xrightarrow{i} T(V)$ – сдвиги, $G_\alpha \xrightarrow{i} H \le GL(V)$ и H – неприводима. Т.е. $G \xrightarrow{i} T \rtimes H$, где H – стаб. 0-я. Пусть U – нетрив. H-блок. Пусть $\Gamma = \{U^h \mid h \in H\}$. $\exists j: H \to H^\Gamma = R \le Sym(\Gamma)$ по правилу: $U^x \cdot j(h) = U^{xh}$. $K = H^U$ (т.е. $H_{\{U\}}/H_{(U)}$).

Тогда $K \le GL(U)$. $\forall U' \in \Gamma \ \exists h \in H : U'^h = U$. $h_{U'}: U' \to U$ – лин. изоморфизм. Продолжим эти отображения по линейности на изоморфизм V в U^Γ. $\varphi = \varphi_U : V \to U^\Gamma$. Тогда H вкладывается в $K \wr_r R$. Более того, φ_U задаёт вложение G в $G^U \wr_r R$, причём это подстан. изоморфизм $H \hookrightarrow K \wr_r R$ (лин. вложение).

Прим. группа наз. basic, если она не вкладывается в product action.

Следствие:

Прим. афф. гр. явл. basic $\Leftrightarrow$ стаб. точки – прим. лин. группа.

Прим. basic группы:

1) Афф. с прим. (как лин. гр.) стабилизатором.

2) Почти простая.

3) Диагональные.

С пом. т. Ашбахера 1) свод. к почти простым гр.

Приложения т. О'Нана–Скотта.

1) Классификация кон. 2-транз. гр.

2-транз. $\Rightarrow$ примитивная. Если G-прим., и $Soc(G) = T^k$, T-наб. гр., то $\operatorname{rank}(G) \geq k+1$, ~~ra~~ (число орбит G_α).

2) G – k-однородна, если G д. транз. на $\Omega^{\{k\}}$.

Если G – 2-однородна, но не 2-транз., то в ней нет инволюции $\Rightarrow$ $|G|$ – неч. $\Rightarrow G$-разр.

$G \leq Sym(\Omega)$ 3) G – синхр., если $\forall f: \Omega \to \Omega$ (f – част. ф-ия), $f \notin Sym(\Omega) \Rightarrow \langle G, f \rangle$ – синхр. автомат.

Синхр. группа примитивна и 2-однородна.

4) Если ф-ия f от n пер. имеет r различных „значений" при $n!$ пер. переменных, то $r \mid n!$ (т. Лагранжа). Индексы подгрупп в S_n до сих пор не известны.

5) Размеры прим. групп $\neq S_n$ и A_n.

$|G| \leq n^{c\sqrt{n}\log n}$.

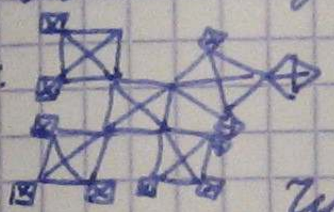
Если G – прим. гр. на n точках, то либо $|G| \leq n^{c \log n}$, либо G – г. Камерона, т.е. $A_m^t \leq G \leq G_0 \wr S_t$, где $G_0 = A_m, S_m$ в действии $\Delta^{\{k\}}$.

6) Гипотеза Симса.

Если G – прим., ~~на~~ в которой G_α имеет орбиту дл. k (отл. от $\{\alpha\}$), тогда $|G_\alpha| \leq f(k)$.

Количество разл. неизм. дист.-транз. графов валентности $k \geq 2$ конечно.

~~Д~~ Беск. дист.-транз. графы валентности k:



– деревья клик.

Число верш. в окр. радиуса d растёт как экспонента. Γ – прим. дист.-транз. граф валентности $k \geq 2$. По гип. Симса, число т. на раст. d огр. $f(k)$. Выберем d дост. большим, что $f(k) < |\Gamma_d(\alpha)|$ в беск. д.-тр. графе. $\Rightarrow$ по т. Мальцева есть беск. модель $\Rightarrow$ противоречие.