Пусть лин. пр-е φ евкл. пр-ва V задано в некот. ОНБ м-цей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Наша задача найти сингул. числа пр-я φ (в том числе найти его норму) $= \max\limits_{|x|=1} |x\varphi|$ и $\min\limits_{|x|=2} |x\varphi|$), а также сингулярное и полярное разложения для φ.

Положим $S = AA^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ — симметр. м-ца (как и следует из теории).

Далее, $f_S(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 16 \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow$

Сингул. числа $\sigma_1 = 2\sqrt{2} = \max\limits_{|x|=1} |x\varphi| = \|\varphi\|$ — норма φ

$\sigma_2 = \sqrt{2} = \min\limits_{|x|=1} |x\varphi|$ — мин. $q(x) = (x\varphi, x\varphi)$ на сфере: $|x| = 1$.

Имеем $D=\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем сингл. разложение $A=Q_1 D Q_2$ и полярное разложение $A=BC$, где $Q_1, Q_2, C \in GO_2(\mathbb{R})$. Заметим, что собств. в-ры пр-я ψ (для кот. $[\psi]=D$) являются и собств. в-рами пр-я $\psi^2=\varphi\varphi^*$. Поэтому

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1=(1,1)$ - собств в-р для $\varphi\varphi^*$ и $\lambda_1=8$, т.е для ψ и $\sigma_1=2\sqrt{2}$

$v_2=(-3,3)$ ... для $\lambda_2=2$, т.е. для ψ и $\sigma_2=\sqrt{2}$.

Значит, $D^2=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=QSQ^*$. Отсюда

$$B=Q^* D Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $|D| = |B| = \pm|A| \neq 0$ (как в нашем примере), то далее все просто, $C = B^{-1}A = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $Q_1 = Q^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = QC =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Однако среди сингулярных чисел могут встретиться и нули, что делать тогда? Заметим, что $A = Q_1 D Q_2 = Q^t D Q_2 \Rightarrow$
$QA = DQ_2 \Rightarrow$ умножая строки м-цы Q на A, т.е векторы ОНБ на φ, мы получаем строки м-цы Q_2 умноженные на соотв. сингул. числа $\Rightarrow$
если $u_1, \ldots u_n$ — строки Q, а $w_1, \ldots w_n$ — строки Q_2, то

$\forall i = 1 - n$ $u_i \varphi = \sigma_i w_i$. Набор в-ров $w_i = \frac{1}{\sigma_i} u_i \varphi$, для которых $\sigma_i \neq 0$ – ортонормированный. Дополняя его до ОНБ всего пространства произвольным образом, находим подходящую матрицу Q_2 т.к. рав-во $QA = DQ_2$ имеет место.

В нашем случае, $w_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0)$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1) \Rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(тут, конечно, дополнять не нужно). Зная Q_2, легко найти $C = Q^* Q_2$. В нашем случае $C = Q^t$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Зам. 1 В док-ве теоремы 7.5.4 не слишком удачно (хотя и верно) м-ца B выражается $B = QDQ^*$. Лучше писать $B = Q^* D Q$, где Q — м-ца перехода от исходного ОНБ к тому, в котором $[\varphi\varphi^*] = D^2$, как это делается в этих записках.

Зам 2 Легко доказать, что сингул. числа φ и φ^* совпадают. Указание: $\varphi = \psi\tau$, где ψ — неотриц. и τ — ортогон. (униt) $\Rightarrow \varphi^* = \tau^* \psi$ $\Rightarrow \varphi^* \varphi = \tau^* \psi^2 \tau = \tau^* (\varphi\varphi^*) \tau$.

Воспользуемся этим замечанием в нашем примере

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ и мы

сразу получаем квадраты сингул. чисел $\Rightarrow$ мин и макс. $|\varphi x|$ при $|x| = 1$ и т.д.

Еще существеннее это соображение, если A — не квадр. м-ца! Скажем, если $A = (1, 1, 1)$, то

$$AA^* = (3) \in M_1(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Тем не менее, $\|A\| = \sigma_1 = \sqrt{3}$ не зависимо от способа вычисления (проверьте!)