Рассмотрим критерий конгруэнтности двух конфигураций $\{P_1, P_2\}$, и $\{P_1', P_2'\}$ в аффин. пр-ве S (см. предл. 8.1.3 из лекций, файл AN-41.pdf, а также зад. 49.32 из [КЗ] или зад. 7.3.4 из [ВИН].

Итак, пусть $\dim P_i = \dim P_i'$, $i = 1, 2$, $\dim \langle P_1 \cup P_2 \rangle = \dim \langle P_1' \cup P_2' \rangle$ и $P_1 \cap P_2$ и $P_1' \cap P_2'$ либо пусто, либо непусто одновременно. Нам надо док-ть, что $\exists f \in GA(S)$ такое, что $P_i f = P_i'$ для $i = 1, 2$.

<u>Зам.</u> $P_1 \cup P_2$ – наим. плоскость, содерж. и P_1, и P_2.

Обозначим через $\overline{U}_i$ и $\overline{U}_i'$, $i=1,2$, векторные подпр-ва, ассоциир. с P_i и P_i' соотв-но. Тогда три первых условия можно записать так: $\dim \overline{U}_i = \dim \overline{U}_i'$, $i=\underline{1},2$ и

$\dim(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) = \dim(\overline{U}_1' \cap \overline{U}_2')$, т.к.

$\dim\langle P_1 \cup P_2 \rangle = \dim(\overline{U}_1 + \overline{U}_2)$, если $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$

и $\dim\langle P_1 \cup P_2 \rangle = \dim(\overline{U}_1 + \overline{U}_2) + 1$, если $P_1 \cap P_2 = \varnothing$

В любом случае имеем $\dim(\overline{U}_1 + \overline{U}_2) = \dim(\overline{U}_1' + \overline{U}_2') \Rightarrow$ ....

Пусть $e_1 \dots e_r$ и $e_1' \dots e_r'$ — базисы $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$ и $\overline{U}_1' \cap \overline{U}_2'$ соот-но, в-ры $e_{r+1}, \dots e_k$ и $e_{r+1}', \dots e_k'$ дополняют их до базисов $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_1'$, а $e_{k+1} \dots e_n$ и $e_{k+1}' \dots e_n'$ — до

базисов U_2 и U_2'. Рассмотрим два случая

1) $P_1 \cap P_2$ и $P_1' \cap P_2'$ не пусто.

Положим $p_0 \in P_1 \cap P_2$ и $p_0' \in P_1' \cap P_2'$. Выберем точки $p_1, \dots p_n$ и $p_1' \dots p_n'$ так, что $e_i = \overline{p_0 p_i}$ и $e_i' = \overline{p_0' p_i'}$, $i = 1 \dots n$. Тогда системы точек $\{p_0, \dots p_n\}$ и $\{p_0', \dots p_n'\}$ аффинно независимы (ещё говорят, находятся в общем положении) и лежат в $P_1 \cup P_2$ и $P_1' \cup P_2'$ соот-но.

По теореме 8.1.2 из лекций (см. также т. 4.3.1 из [ВИН]) сущ-ет $f \in GA(S)$: $f(p_i) = p_i'$, $i = 0 \dots s$.

Ясно, что $P_i f = P_i'$, $i=1,2$. и в этом случае всё док-но.

2) Пусть $P_1 \cap P_2 = P_1' \cap P_2' = \varnothing$.

Пусть $p_0 \in P_1$, $p_{n+1} \in P_2$ и $p_0' \in P_1'$, $p_{n+1}' \in P_2'$ соот-но.

Т.к. $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \overline{p_0 p_{n+1}} \notin U_1 + U_2$ (аналогично для $\overline{p_0' p_{n+1}'}$) см., например, Т. 7.1.6 из [ВИН].

Выберем точки $p_1, \dots, p_n$ и $p_1' \dots p_n'$ так, что

$\overline{p_0 p_i} = l_i$, $\overline{p_0' p_i'} = l_i'$ для $i = 1 \dots k$ и

$\overline{p_{n+1} p_i} = l_i$, $\overline{p_{n+1}' p_i'} = l_i'$ для $i = k+1, \dots n$.

Наборы из $n+1$ в-ров $\overline{p_0 p_{n+1}}, l_1, \dots l_n$ и $\overline{p_0' p_{n+1}'}, l_1', \dots l_n'$

лин. незав $\Rightarrow$ система из $n+2$ точек

$p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ и $p_0', \dots, p_{n+1}'$ аффинно независимы

$\Longrightarrow \exists f \in GA(S): \; p_i f = p_i', \; i = 0, 1, \dots, n+1.$

$\Longrightarrow P_i f_i = P_i', \; i = 1, 2$ и утв-е доказано.

Доказанный нами критерий удобно применять на практике, см. задачи 49.34 и 49.35 из [К3] (problems 45).