Мы покажем как с помощью идей, изложенных в док-ве Теоремы 7.3.2 из [ВЧН] (Теорема 2 из AN-42) описать геометр. смысл конкретного движения, данного в векторизированной форме (см. зад. 6 из Problems 46 и зад. 51.23 и 51.24 из [КЗ]).

Пусть $o = (0,0)$ — начало отсчета и движение f плоскости $\mathbb{E}^2$ задано своим диф-лом $df = \varphi$

$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $a = of = (-2,4)$ (см. зад. 51.23 а))

Найдем плоскость $\underline{P} = p_0 + \bar{U}$, определенную

в теореме 2. Подпр-во $U = \{x \in V \mid x\varphi = x\}$ — подпр-во собств. в-ров, соотв. собств. числу 1.

В нашем случае хар. корни φ — это i и $-i$ $\Rightarrow$ $U = 0$. Поэтому $\dim P = \dim U = 0 \Rightarrow P = \{p_0\}$ — точка.

Значит, f — поворот отн-но p_0 на угол $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, т.к. канон. вид $[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Осталось найти точку p_0 (точнее её коор-ты).

В обозн. теоремы 2 сущ. единств. $x_0 = \overrightarrow{Op_0} \in U^\perp$, для которого $x_0\varphi + c = x_0$, где $(-2,4) = a = b + c$, $b \in U$, $c \in U^\perp$ $\Rightarrow$ $c = a = (-2,4) \Rightarrow x_0 = (x, y)$

$U = 0$

$(x,y)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+(-2,4)=(x,y)$, т.е. $(-y-2,x+4)=(x,y)$

$\Rightarrow x=-3$, $y=1$, т.е. $p_0=(-3,1)$. Окончательно,

f – поворот пл-сти $\mathbb{E}^2$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ отн-но точки

$(-3,1)$ (не верьте ответу в 51.23 а)....).

Рассмотрим теперь случай (51.24 а)), когда

$df=\varphi$ имеет м-цу $[\varphi]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $a=of=(1,0)$.

Хар. корни φ – это 1 и -1. Поэтому $\dim P=\dim \bar{U}=1$

Собств. в-р, соотв. 1 – $(1,1)$, для -1 – $(1,-1)$

Поэтому $\bar{U}=\langle(1,1)\rangle$, $\bar{U}^{\perp}=\langle(1,-1)\rangle$. В частности,

$a=(1,0)=b+c=\beta(1,1)+\gamma(1,-1)\Rightarrow b=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ и $c=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Таким образом, f — скользящее отражение вдоль прямой $P = p_0 + U$, т.е. композиция отражения отн-но P и паралл. переноса на вектор $b = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Чтобы найти некот. (любую) точку p_0 на P, снова восп. соотношением $x_0\varphi + c = x_0$ из т.2;

$$(x, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x, y) \Rightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

ур-е, соотв. прямой $\Rightarrow p_0 = (\frac{1}{2}, 0)$ — подх. точка.

Окончательно $P = (\cancel{-}\frac{1}{2}, 0) + \langle (1, 1) \rangle$ (или что то же самое, P — прямая с ур-ем $y = x - \frac{1}{2}$)

а f — скользящее отражение вдоль этой прямой со сдвигом на в-р $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(верьте ответу в 51.24.а)...)