Задача 2 из гл. 5 §2 [ВИН].

Пусть $x_0, \ldots x_n \in F$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.
$V = F[x]_n$ — пр-во многочленов над F
Д-ть, что $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n$ — базис V^*, где $\varepsilon_i(f) = f(x_i)$.

Решение: Достаточно найти базис $f_0, \ldots f_n$ пр-ва V: $\varepsilon_j(f_i) = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in \{0, \ldots n\}$

По т-ме об инт. многочлене Лагранжа
$\exists!$ мн-н f_i степ. $\leq n$: $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.
(Он имеет вид: $f_i(x) = \prod\limits_{j \neq i} f(x_i) \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$, хотя это и не важно здесь)

Тогда $\varepsilon_j(f_i) = f_i(x_j) = \delta_{ij}$, что и требовалось.
Ф-ла (3) из [ВИН]: $f = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) f_i$ — интерпол. ф-ла Лагранжа!