Рассмотрим билинейную форму из примера 4 из гл. 5 § 3 из [ВИН]: $V=K^2$ — арифм. пр-во. Базис $e_1=(1,0)$ и $e_2=(0,1)$. $\alpha(x,y)=\begin{vmatrix} x\\ y\end{vmatrix}$ — опр-ль м-цы, составл. из строк $x,y\in V$.

Запишем $\alpha(x,y)$ как форму в базисе e_1, e_2.

Имеем $a_{11}=\alpha(e_1,e_1)=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0$, $a_{12}=\alpha(e_1,e_2)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$,
$a_{21}=\alpha(e_2,e_1)=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$, $a_{22}=\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0$, т.е.

$$\alpha(x,y)=x_1y_2-y_1x_2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

где $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ — м-ца билинейной формы α.

Форма α — кососимметрическая, т.к. $A=-A'$ — кососимметр. $\operatorname{rk}\alpha=\operatorname{rk}A=2 \Rightarrow \alpha$ невырождена.

Найдём как записывается ф-ция α и её м-ца в другом базисе: $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_2$

1 способ: $a'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $a'_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $a'_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $a'_{22} = 0$.

2 способ: в системе в-р столбец (как у Винберга):

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2)\,C \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A' = C^T A C$ (см. стр. 192–193) $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

В системе в-р строка $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

но в этом случае $A' = T A T^T$ (проверьте!)

$\Rightarrow$ то же самое $\Rightarrow$ ответ не зависит от выбора системы.

Рассмотрим кв. ф-цию, с м-цей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}$, т.е $q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$ (или билинейную функцию $\alpha(x,y) = xAy^T$ ассоциированную с ней).

Наша задача найти для нее ортогональный базис, в котором она имеет диагональный вид.

<u>1 способ</u> (метод Лагранжа, т.е выделения полных квадратов):

$$q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = \left(x_1 + \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \tfrac{9}{4}x_2^2 + 2x_2^2 =$$

$$= \left(x_1 + \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \tfrac{1}{4}x_2^2.$$ Значит, замена

$x_1' = x_1 + \tfrac{3}{2}x_2$ и $x_2' = x_2$ приводит $q(x)$ к

виду к диагональному виду $q(x') = (x_1')^2 - \frac{1}{4}(x_2')^2$

Но тогда $x_1 = x_1' - \frac{3}{2}x_2'$, $x_2 = x_2' \Rightarrow x' = xT$,

где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица перехода от старого базиса к новому, т.е ортогональному $\Rightarrow$

$f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (-3/2, 1)$ - искомый базис.

Проверим это: $\alpha(f_1, f_2) = f_1 A \cdot f_2^T =$

$= (1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 3/2)\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0!$

Нормальный вид $q(x)$ и её сигнатура над $\mathbb{R}$: $z_1^2 - z_2^2$ и $(1, 1)$ над $\mathbb{C}$: $u_1^2 + u_2^2$.

2 способ: Поскольку угловые миноры $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$ отличны от 0, то можно применить метод Якоби.

Диаг. вид: $(x_1')^2 - \frac{1}{4}(x_2')^2$ сразу получаем, т.к.

$a_1 = \frac{\delta_1}{\delta_0} = 1$ и $a_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = -\frac{1}{4}$ (см Теорему 2)

Найдем векторы орт. базиса: f_1 и f_2.

Т.к. $\alpha(e_1, e_1) = q(e_1) = 1 \neq 0 \Rightarrow f_1 = e_1$

находим f_2 в виде $f_2 = e_2 + \lambda_1 f_1$ и соотношения $(f_2, f_1) = 0$ – ортогонализация Грама-Шмидта. Имеем

$f_2 = (0,1) + \lambda(1,0) = (\lambda, 1)$ и $0 = (f_2, f_1) = (\lambda, 1)\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= (\lambda, 1)\cdot(1, 3/2) = \lambda + \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow f_2 = (-3/2, 1)$.

Приведем ~~к~~ $\overbrace{\text{методом Лагранжа}}$ к каноническому виду и найдем симплектический базис кососимметрической билинейной ф-ции из 37.33 а) [КЗ]

$\alpha(x,y) = x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2 =$

$= x_1(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 =$

Сделаем замену: $x_2' = x_2 - x_3$ и $y_2' = y_2 - y_3$ (ост. не меняются). Тогда $x_2 = x_2' + x_3$ и $y_2 = y_2' + y_3 \Rightarrow$

$$\alpha(x,y) = x_1 y_2' - x_2' y_1 + 2(x_2'+x_3)y_3 - 2(y_2'+y_3)x_3 =$$

$$= y_2'(x_1 - 2x_3) - x_2'(y_1 - 2y_3) + 2x_3y_3 - 2y_3x_3 =$$

$= x_1'y_2' - x_2'y_1'$, где $x_1' = x_1 - 2x_3$ и $y_1' = y_1 - 2y_3$.

Сл-но, канонический вид: $x_1'y_2' - x_2'y_1'$

Т.к. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_3 \\ x_2' = x_2 - x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_3' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')T$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – м-ца перехода (система вектор-строк)

Проверить, что $\alpha(e_i, e_j) = 0$ за искл. $\alpha(e_1, e_2) = -\alpha(e_2, e_1) = 1$.

$\Rightarrow$ симплект. базис: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (2,1,1)$

строки этой м-цы.