Теория полуторалинейных ф-ций над $\mathbb{C}$ подобна теории билинейных ф-ций над $\mathbb{R}$, поэтому методы решения задач фактически те же.

Рассмотрим например эрмитову полуторалинейную ф-цию $\alpha(x,y) = x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1$ и ассоц. с ней эрмитову квадр. функцию:

$q(x) = x_1\bar{x}_1 + (1-i)x_1\bar{x}_2 + (1+i)x_2\bar{x}_1$.

М-ца этих ф-ций $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ – эрмитова,

т.к. $A^* = \bar{A}' = A$. Найдем норм. вид этих ф-ций и соотв. ортог. базис.

Начнём с метода Якоби. Т.к. $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = -2$, то он работает и $a_1 = \frac{\delta_1}{\delta_0} = 1$, $a_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = -2 \Rightarrow$

$\alpha(x,y)$ приводится к виду: $x_1'\overline{y_1'} - 2x_2'\overline{y_2'}$, а

$q(x)$ к виду $x_1'\overline{x_1'} - 2x_2\overline{x_2'} = |x_1'|^2 - 2|x_2'|^2$.

Найдём соотв. орт. базис методом Грама-Шмидта:

$f_1 = e_1 = (1,0)$ $\quad f_2 = e_2 + \lambda f_1 = (\lambda, 1)$.

Условие ортогональности: $\alpha(f_1,f_2) = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= (1, 1-i)\begin{pmatrix} \overline{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{\lambda} + 1 - i = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = -1+i \Rightarrow \lambda = -1-i$

$\Rightarrow f_2 = (-1-i, 1)$.

Метод Лагранжа: $q(x) = x_1\overline{x_1} + (1-i)x_1\overline{x_2} + (1+i)x_2\overline{x_1} =$

$$= (x_1 + (1+i)x_2)(\overline{x_1 + (1+i)x_2}) - (1+i)(\overline{1+i})x_2\overline{x_2} =$$

$$= x_1'\overline{x_1'} - 2x_2'\overline{x_2'}, \text{ где } x_1' = x_1 + (1+i)x_2 \text{ и } x_2' = x_2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_1' - (1-i)x_2' \\ x_2 = x_2' \end{array} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{array}{l} f_1 = (1,0) \\ f_2 = (-1-i, 1) \end{array}$$

— искомый ортогональный базис.

Заметим еще, что в силу утв-я зад. 37.42 (из Д.3) для компл. эрмитовой ф-ции $\alpha(x,y)$ найдутся симметр. и кососим. вещ. ф-ции $\beta(x,y)$ и $\gamma(x,y)$: $\alpha(x,y) = \beta(x,y) + i\gamma(x,y)$. Выведите отсюда, что $\alpha(x,y)$ пол. определена $\Leftrightarrow$ $\beta(x,y)$ полож. опр-на!