Главная цель данного семинара — умение решать на практике элем. задачи в пространствах со скалярным произведением. Предполагается, что вы знакомы с решением этих задач в стандартных евкл. пр-вах векторов (семинары по аналит. геометрии). Поэтому в файле Problems33 в основном собраны задачи, где аналогичные вычисления нужно делать в арифм. унитарном пр-ве $\mathbb{C}^n$, в пр-вах многочленов и матриц с соотв. скалярными произведениями. Если вы „подзабыли" как решаются эти задачи в $\mathbb{R}^n$ — сделайте сначала их (благо в [КЗ] таких много).

Первое, что надо понять про скалярное пр-е на $\mathbb{C}$ — это полуторалинейная форма. Хотя ф-ла $(a,b) = [a][b]^*$ (в случае арифм. пр-ва со станд. скалярным пр-ем) одна и та же в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, но в $\mathbb{R}^n$ $[b]^* = [b]'$, а в $\mathbb{C}^n$ $[b]^* = \overline{[b]}'$. Поэтому

в $\mathbb{R}^n$: $|(1,-1)| = \sqrt{((1,-1),(1,-1))} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

в $\mathbb{C}^n$: $|(1,i)| = \sqrt{((1,i),(1,-i))} = \sqrt{1^2+i(-i)} = \sqrt{2} \neq$

$\neq \sqrt{((1,i),(1,i))} = \sqrt{1^2+i^2} = 0$!

Решим к примеру зад. 43.21 е) из [КЗ], т.е. найдём расстояние между в-ром $x=(0,-i,1+i)$ и подпр-вом U, зад. ур-ем: $x_1+ix_2-(2-i)x_3=0$.

Конечно, можно найти ФНР нашей системы (из одного ур-я), получив базис $\overline{U}$: в нём будет три вектора a_1, a_2, a_3. А далее восп. ф-лой из т. 5.4.3 [ВИН] $\rho^2(x, U) = \dfrac{G(a_1, a_2, a_3, x)}{G(a_1, a_2, a_3)}$ или (что разумнее) вспомнить, что сущ-ет единств. представление $x = u + w$, где u – орт. проекция, w – орт. сост. и $\rho(x, U) = |w|$. Сущ-ет станд. способ искать орт. проекцию: $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ и $(u, a_i) = (x, a_i)$ $\forall i = 1 \ldots 3$. Находя из трех ур-й три неизв. мы находим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow$ находим $u \Rightarrow$ $\Rightarrow$ находим $w = x - u$. Однако есть путь короче: можно искать w как орт. проекцию x на $\overline{U}^{*} = \overline{U}^{\perp}$

Во-первых, $\dim U^* = 4 - \dim U = 1$. Во-вторых, U^* „дана", если U задана системой ур-й:

Ведь $x_1 + i x_2 - (2-i)x_3 = 0 \iff (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1\\-i\\-2-i\end{pmatrix} = 0$,

т.е. $U^* = \langle a \rangle$, где $a = (1, i, -2-i)$ — вектор, компл. сопр. коэф-тов ур-я. Теперь $w = \alpha a$

и $7\alpha = \alpha(a,a) = (w,a) = (w+u,a) = (x,a) =$

$$= (0, -i, 1+i)\begin{pmatrix}1\\i\\-2+i\end{pmatrix} = -2-i \Rightarrow \alpha = -\frac{2+i}{7} \Rightarrow$$

$$(w,w) = (\alpha a, \alpha a) = |\alpha|^2 (a,a) = \frac{5}{49}\cdot 7 = \frac{5}{7} \Rightarrow \rho(x,U) = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Зад. с многочленами обсуждаются в примерах в § 5.4 из [ВИН], рассм. пр-во матриц.

Пусть $V = M_n(\mathbb{R})$ и на V задана билинейная ф-ция $f(X,Y) = tr(X \cdot Y')$. Заметим, во-первых,

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\uparrow$ транспон.

что $f(X,X) = tr(X \cdot X') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij})^2 > 0$

$\forall X \neq 0 \Rightarrow f$ положительно определена $\Rightarrow$

V евкл. пр-во отн-но этой ф-ции $f \Rightarrow f(X,Y) = (X,Y)$.

Найдем ортог. дополнение к $U = \{X \in V \mid X = X^* = X^T\}$

подпр. ву симметрических матриц.

Базис $U := \{E_{ii};\ E_{ij} + E_{ji}\ (j \neq i)\}$ и $|U| = \frac{n(n+1)}{2}$.

$Y \in U^\perp \Leftrightarrow Y$ ортогонален любой м-це из базиса $U \Rightarrow$

$$0=(Y, E_{rs}) = tr(Y \cdot E_{rs}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} e_{ij} = y_{rr} \quad \forall r = 1 .. n$$

$$0 = (Y, E_{rs}+E_{sr}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} e_{ij} = y_{rs} + y_{sr} \quad \forall r, s \in \{1..n\}, \ r \neq s$$

$\Rightarrow Y = -Y^* = -Y'$, т.е. U^* – подпр-во кососим. матриц.

Докажем ещё неравенство Бесселя (зад. 43.22)

$e_1, \ldots e_k$ – ортон. набор в-ров в n-мерном евкл(унит) пр-ве (т.е $k \leq n$). Пусть $x_i = (x, e_i)$ для $x \in V$.

Д-ть, что $\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \leq (x, x) = |x|^2$.

Имеем $0 \leq (x - \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, x - \sum_{j=1}^{k} x_j e_j) = (x,x) -$

$- (x, \sum_{j=1}^{k} x_j e_j) - (\sum_{i=1}^{k} x_i e_i, x) + (\sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \sum_{j=1}^{k} x_j e_j) =$

$$= |x|^2 - \sum_{j=1}^{k} \overline{x_j} (x, e_j) - \sum_{i=1}^{k} x_i (e_i, x) + \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k} x_s \overline{x_t} \delta_{st} =$$

$$= |x|^2 - \sum_{j=1}^{k} \overline{x_j}\, x_j - \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{x_i} + \sum_{s=1}^{k} x_s \overline{x_s} = |x|^2 - \sum_{i=1}^{S} |x_i|^2$$

Ясно, что это неравенство превращается в рав-во $\Leftrightarrow$ $n = k$ (равенство Парсеваля).

Заметим, что в нер-ве Бесселя правая часть не зависит от k $\Rightarrow$ Если в бесконечномерном пр-ве (скажем, многочленов или ф-ций) мы найдем посл-сть ортонорм. векторов $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, то нер-во Бесселя верно и для них

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \le |x|^2$$

Если интересно, как это применяется в теории мн-нов и ф-ций — можно почитать § 5.3 „Ортогональные многочлены" из [КоС2] и порешать соотв. задачи из § 4.3 в [К3] (см. например, зад. 8 из дом. задания).