Если $A \in M_n(\mathbb{C})$, то сопряженная к A матрица – это $A^* = \overline{A}'$. Ясно, что если $A \in M_n(\mathbb{R})$, то $A^* = A'$.

Если $\varphi \in L(V)$, где V – евкл или унит. пр-во, то сопряженное к нему преобразование φ^* задается рав-вом: $(x\varphi, y) = (x, y\varphi^*)$ | В системе вектор-строка!

О его существовании см. теорет. материал.

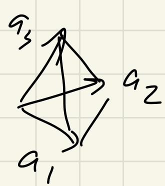
Ясно, что в ОНБ: $[\varphi^*] = [\varphi]^*$, но это не так в произв. базисе. Как найти $[\varphi]^*$ в этом случае: Пусть $a_1 \ldots a_n$ – базис и $G = (g_{ij}) = G(a_1, \ldots a_n)$ – матрица Грама этого базиса, т.е $g_{ij} = (a_i, a_j)$ для всех i, j. Тогда

$$x[\varphi]Gy^* = (x\varphi, y) = (x, y\varphi^*) = xG(y[\varphi^*])^* =$$

$= xG[\varphi^*]^* y^*$. Поскольку ф-ция однозначно опр-ся своей матрицей, имеем $[\varphi]G = G[\varphi^*]^*$

$$\Rightarrow [\varphi^*] = (G^{-1}[\varphi]G)^* = G^*[\varphi]^*(G^{-1})^*.$$

Пусть, например, в $\mathbb{R}^3$ задан прав. тетраэдр, и мы хотим найти оператор (точнее его м-цу), сопряжённый к оператору проектирования φ на одну из граней параллельно одному из рёбер, не лежащих в данной грани.

Естественный базис: 

где a_1, a_2, a_3 – рёбра тетраэдра и

φ – оператор проектирования на пл-ть (a_1, a_2) параллельно вектору a_3. Тогда $[\varphi] = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Т.к. $\angle(a_i, a_j) = 60^\circ$ при $i \neq j$, то м-ца Грама

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi^*] = G^* A^* (G^{-1})^* = G A G^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 5/4 & -3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Замечание о системе в-р-столбец (см. [ВИН]):

A^* задается ф-лой: $(x, Ay) = (A^* x, y)$ и т.д.

Отметим также полезность леммы из д-ва т. мн 72.1 в [ВМ]: если $\forall a, b \in V \ (a, b\varphi) = (a, b\psi)$ $\Rightarrow \varphi = \psi$ (здесь ψ — произв. пр-я пр-ва V).

Докажем, например, эквивалентность след. определений нормального преобразования.

1) $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$ и 2) $\forall x, y \in V \ (x\varphi, y\varphi) = (x\varphi^*, y\varphi^*)$

$\underline{1 \Rightarrow 2}$) $\forall x, y \in V \ (x\varphi, y\varphi) = (x, y\varphi\varphi^*) = (x, y\varphi^*\varphi) =$

$\underset{\varphi^{**} = \varphi}{=} (x, y\varphi^*\varphi^{**}) = (x\varphi^*, y\varphi^*)$ очевидно.

2 ⇒ 1) $\forall x, y \in V \ (x, y\varphi\varphi^*) = (x\varphi, y\varphi) = (x\varphi^*, y\varphi^*)$

$= (x, y\varphi^*\varphi) \underset{\text{по лемме!}}{\Rightarrow} \varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$. ∎