Пусть лин. пр. е φ евкл (или унит.) пр-ва задано в некотором ОНБ e пр-ва V матрицей:

$$A = [\varphi]_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ОНБ f, в котором $[\varphi]_f$ имеет канонический вид. См. т. 7.23 и 7.24. из [ВМ].

---

1) Т.к. e – ОНБ $\Rightarrow [\varphi^*] = [\varphi]^* = A' = A = [\varphi]$ $\Rightarrow \varphi\varphi^* = \varphi^2 = \varphi^*\varphi \Rightarrow \varphi$ – нормальное пр-е.

2) Найдем характ. корни м-цы A. Можно „по-честному" выписать мн-н 3-й степени, а можно „заметить", что $\lambda = 3$ – корень, т.к. $|A - 3E| = 0$.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ a_2= \\ a_1= \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} =a_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Имеем $\operatorname{Ker}(\varphi - 3\varepsilon) = \langle a_1, a_2 \rangle$, а $a_3\varphi = -3a_3$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi + 3\varepsilon) = \langle a_3 \rangle \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3,\ \lambda_3 = -3.$

В силу п. 3 т. 7.2.2 в-ры, соотв. разл. собств. зн-ям норм. пр-я, ортогональны $\Rightarrow (a_3, a_2) = (a_3, a_1) = 0$

$\Rightarrow f_3 = \dfrac{a_3}{|a_3|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$. В-ры a_1 и a_2 соотв. числу $\lambda = 3 \Rightarrow$ их надо ортогонализировать и нормир.:

$b_1 = a_1 = (-1, 0, 1)$, $b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = (2, 0, 1) - \dfrac{-2}{2}(-1, 0, 1) = (1, 1, 1)$

$f_1 = b_1/|b_1| = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $f_2 = b_2/|b_2| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Таким образом, $[\varphi]_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

— матрица перехода к ОНБ f.

Поскольку $Sp(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ в данном случае, то нет разницы в каком пр-ве мы рассм-ем оператор в евкл. или унитарном. Это не так в следующем примере.

Пусть теперь φ задана матрицей $[\varphi]_e = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Здесь нормальность оператора не так очевидна (потом мы найдем это), поэтому проще проверить, что

$$[\varphi\varphi^*] \underset{\text{ОНБ!}}{=} [\varphi][\varphi]^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = [\varphi]^*[\varphi] \underset{\text{ОНБ!}}{=} [\varphi^*\varphi].$$

Тем не менее, снова $\lambda = 3$ – корень, т.к.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a_1 = (1, 1, 1)$, $(-1, -1, 2) = a_3$, $(0, -3, 3) \sim (0, -1, 1) = a_2$

Заметим, что $f_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 27 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 9)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_{2,3} = \dfrac{3 \pm i3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$

Таким образом, канон. вид φ будет

в $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 + i3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 - i3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, а в $\mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3/2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 3/2 \end{array}\right)$

Теперь ищем ОНБ: вектор $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \dfrac{a_1}{|a_1|}$

в обоих случаях. Найдём сначала кан. базис в

в $\mathbb{C}$: т.к. $a_2, a_3 \in V(\varphi - 3'\varepsilon)$ (вспомните теорему о корневом разложении!), можно взять

$B_0 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $B_0 N = B_0(A - \lambda_2 E)$. Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -3, \; \frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}, \; \frac{3}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2} \\ -1 & -1 & 2 & \underset{c}{} \end{array}\right) = b_3$$

Я не буду считать c, т.к. ясно, что $c = \alpha b_3$ (без строк лин. зав. (проверьте!)). Зануляя c (т.е. вычитая из него αb_3, получаем, что $a_2 - \alpha a_3$ — собств. в-р, соотв. $\lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2}$, но тогда b_3 — собств. в-р, соотв. $\bar{\lambda}_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ (снова т-ма о корневом!)

Но если $b_3 = \left(-3, \frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2}\right)$, то

$b_2 = \left(-3, \frac{3}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}\right)$ — с.в. для λ_2,

т.к. $b_2 = \overline{b_3}$ см. Предл. 1 на стр. 222 [ВИН]

или соотв. место в д-ве т-мы 7.2.4. из [ВМ].

Поэтому $f_2 = \frac{1}{|b_2|} b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

и $f_3 = \frac{1}{|b_3|} b_3 = \overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

f_1, f_2, f_3 — искомый базис если V — унитарное пр-во.

Если V задано над $\mathbb{R}$, то (по сообр. из

того же предл. 1 [ВИН] или док-ва т. 7.2.4 из [ВМ]):

$c_2 = \frac{1}{2}(b_2 + b_3) = \mathrm{Re}(b_2)$ и $c_3 = \frac{1}{2i}(b_2 - b_3) = \mathrm{Im}(b_2)$

лежат в $\mathbb{R}$ и ортогональны. В нашем случае:

$c_2 = (-2, 1, 1) \sim (-3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \mathrm{Re}(b_2)$ и

$c_3 = (0, 1, -1) \sim (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) = \mathrm{Im}(b_2)$.

Осталось их нормировать:

$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$ и $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

Добавляя к ним $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, получаем

искомый базис в случае евкл. пр-ва.