Поскольку самосопряженные и кососэрмитовы преобразования явл-ся нормальными, то их приведение к канон. виду — частный случай описанного в AG-7 процесса. В частности, в примере 1 из AG-7 к канон. виду как раз и приводится самосопр. преобразование.

Важное преимущество данного частного случая — тот факт, что мы знаем, что $Sp(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ в случае самосопр. пр-я и $Sp(\varphi) \subseteq i\mathbb{R}$ в случае кососэрмитова пр-я!

В общем, не забывайте ортогонализировать собств. в-ры, соотв. одинаковому же собств. числу,

а потом нормировать все, что получилось, и будет Вам счастье (в смысле соотв. ОНБ).

Те же самые методы работают, когда Вы приводите вещ. (эрмитову) кв. форму к главным осям. Рассм-м например эрмитову кв. форму: $q(x) = 3x_1\bar{x}_1 - i x_1\bar{x}_2 + i x_2\bar{x}_1 + 3x_2\bar{x}_2$.

Приведем м-цу $A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ к канон. виду.

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4. \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ - кан. вид.

ОНБ: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\lambda_1=2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ $\lambda_2 = 4$

$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ и $e_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - искомый ОНБ.

Поэтому $q(x) \sim q'(y) = 2x_1\bar{x}_1 + 4x_2\bar{x}_2$

и $x = yQ$, где $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. – подход. унитарная м-ца замены.

Если одна из пары кв. форм положит. определена, то их можно одновременной заменой переменных привести к диаг. виду.

Пусть $f(x) = x_1 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ и $g(x) = -4x_1x_2$

Т.к. $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$, то $f(x) \underset{R}{\sim} f_1(y) = y_1^2 + y_2^2$

$\Rightarrow f(x) > 0$ (т.е. f положит. опр-на). Матрица

замены $\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = \sqrt{3}x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 \end{array} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Применяя ту же замену $x = yR$ ко второй форме, имеем $g(x) = -4x_1x_2 \sim -4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2\right)\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 = g_1(y)$.

М-ца B в форме $g_1(y) = yBy'$ имеет вид $B = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda_1 = 2/3,\ \lambda_2 = -2.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{3} & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & -2/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

и замена $y = zQ$ переводит $g_1(y)$ в $g_2(y) = \frac{2}{3}z_1^2 - 2z_2^2$ — диаг. вид. При этом $f_1(y) = yEy' \underset{Q}{\sim} zQEQ'z' = zEz' = z_1^2 + z_2^2$, т.к. $Q' = Q^{-1}$ (Q - ортогон.)

$\Rightarrow$ замена $x = yR = zQR = zT$ с матрицей

$$T = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$ — искомая!

С помощью самосопр. преобразования удобно искать кан. вид ортогон. преобразования и соотв. ОНБ, не переходя в унитарное пр-во.

Заметим, что $(\varphi+\varphi^*)^* = \varphi^{**}+\varphi^* = \varphi+\varphi^*$, т.е. $\varphi+\varphi^*$ — всегда самосопр. Пред, что φ ортогон. пр-е.

Если v — с.в. этого пр-я с с.ч. λ, то v — с.в. φ^* но с с.ч. $\bar{\lambda}$. Поэтому, если $\psi = \varphi+\varphi^*$, то

$v\psi = v(\varphi+\varphi^*) = \lambda v + \bar{\lambda} v = (\lambda+\bar{\lambda})v$ — с.в. и пр-я ψ, с вещ. с.ч. $\lambda+\bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda)$. Поскольку φ - орт $\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow$ Если $\lambda+\bar{\lambda} = 2\cos\alpha$, где $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Таким образом, хар. корни

1 пр-я φ соотв. хар. корень 2 пр-я ψ, хар корню -1 $\longmapsto$ хар. корень -2, а паре комплексно сопр. корней $\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ соотв. 2 одинаковых вещ. корня, равных $2\cos\alpha$. Таким образом, находя базы подпр-в собств. в-ров пр-я ψ (а все эти в-ры вещественны), мы найдем нужные базы для вещ. корней 1 и -1 пр-я φ, а также базы двумерных подпр-в в которых лежат собств. (которые вообще говоря, комплексные) в-ры, соотв. не вещ., по парно сопряженным корням.

Пусть $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ — 2-мерное подпр-во, заданное 2-мя векторами (собств. для φ), в котором (при комплексификации лежит пара комплексн. собств. в-ров, соотв. паре корней $\cos\alpha + i\sin\alpha$). Нам надо найти ОНБ базу U; состоящем из в-ров u_1, u_2: $u_1\varphi = u_1\cos\alpha - u_2\sin\alpha$

(*) $u_2\varphi = u_1\sin\alpha + u_2\cos\alpha$,

причем (из теории) мы знаем, что такие в-ры там точно есть. (мы так же знаем чему равен $\cos\alpha$, т.к. это $\frac{1}{2}$ хар. корня гр-я ψ).

Положим $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$. Заметим, что $u_1\varphi =$
$= u_1\cos\alpha - u_2\sin\alpha \in U \Rightarrow U = \langle u_1, u_1\varphi \rangle$.

Ортонализирую методом Грама - Шмидта пару u_1 и $u_1\varphi$ имеем $u_2' = u_1\varphi - (u_1\varphi, u_1)u_1 =$
$= u_1\varphi - u_1\cos\alpha \Rightarrow u_2'$ ортонален u_1 и
$|u_2'| = |\sin\alpha|$. Положим $u_2 = \dfrac{u_1\cos\alpha - u_1\varphi}{\sin\alpha}$
(считая, что $0 < \alpha < \pi$). Тогда u_1, u_2 —
— искомый ОНБ, как несложно убедиться, подставляя в $(*)$.

Рассмотрим, напр., как это прием ускоряет решение зад. 46.6.г) („обязат." задач из ДЗ)

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A^* = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$\chi_B(\lambda) = (\mu - 1)^2(\mu - 2) \Rightarrow$ корни A $\lambda = 1$, $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

(т.к. $2\cos\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 0$, $2\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$)

Ищем собств. в-ры B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

собст. 2

собст. 1

$\Rightarrow e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ – с.в. для $\lambda = 1$ (т.е. для $\mu = 2$)

Искомые в-ры u_1, u_2 для $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ лежат в

в $\langle (1,1,0),(0,0,1)\rangle$ положим, напр.,

$u_1 = (0,0,1)$. Тогда $u_2 = \dfrac{u_1\cos\alpha - u_1\varphi}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$$u_2 = \left((0,0,1)\cdot\frac{1}{2} - (0,0,1)A\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\left(0,0,\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ и кан. вид } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$