

## Задачи 19

### Делимость в евклидовых кольцах и редукция в уравнениях с многочленами

Теоретический материал: гл. 5, § 2,3 из [ВМ], гл. 4, § 2,3 из [ДМ - АН6, АН7], гл. 3, § 2,5 из [ВИН].

#### К 20.11.2019:

1. Для чисел  $a = 6787$  и  $b = 7194$  найти наибольший общий делитель  $d$  и целые числа  $u$  и  $v$  такие, что  $d = au + bv$ .

2. Пусть  $a$  — целое, а  $m, n$  — натуральные числа. Найти наибольший общий делитель чисел

а)  $a^m - 1$  и  $a^n - 1$ ;

б)  $a^m + 1$  и  $a^n + 1$ .

3. Зад. 25.2 д) и 25.7 а) из [КЗ].

4. Зад. 27.8 б) в) г) из [КЗ].

5. Зад. 25.3 б) и 25.5 а) из [КЗ].

6. Зад. 25.8 а) и д) из [КЗ].

7. Зад. 28.1 и 28.2 в) ж) из [КЗ].

8. Решить уравнение:  $x^5 - x^4 + 2x^3 + 22x^2 - 35x + 75 = 0$ .

#### На месяц:

9 (Ю.Г. Прохоров, МИАН): Пусть  $m$  и  $n$  — натуральные числа, для которых

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}.$$

Докажите, что 101 делит  $m$ .

10. Пусть  $A$  — евклидово кольцо,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ .

а) Докажите, что найдутся  $u_1, u_2, \dots, u_n \in A$  такие, что  $\sum_{i=1}^n a_i u_i = (a_1, \dots, a_n)$ .

б) (Е.С. Голод) Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$  выбраны так, что  $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ . Докажите, что найдутся  $u_2, \dots, u_n \in A$  такие, что

$$b_1 = \sum_{i=2}^n u_i \frac{a_i}{(a_1, a_i)}.$$