

Задачи 44

Пространства со скалярным произведением и их преобразования: сингулярные числа, полярное и сингулярное разложения

Теоретический материал: гл. 7, § 5 из [ВМ], гл. 6, § 3 (стр. 233-234) из [ВИН], файл AN-38.pdf, а также указания по решению задач из файла AG-10.pdf на сайте.

К 07.05.2020:

Новый материал:

Самостоятельно разобрать новый материал, следуя указаниям из файла AN-38.pdf, по гл. 7, § 5 из [ВМ]: определение изометричности преобразований и теорема об изометричности линейного преобразования φ и неотрицательного преобразования $\sqrt{\varphi\varphi^*}$, определение сингулярных чисел и теорема о сингулярных числах нормального преобразования, теоремы о полярном и сингулярном разложении, сингулярные числа и норма оператора. Разобраться с возникающими здесь практическими задачами, см. файл AG-10.pdf.

Заключительная контрольная работа состоится в четверг 14.05.2020, ее тема — теория линейных операторов конечномерных пространств (как произвольных, так и со скалярным произведением).

Задачи:

1*. Линейное преобразование φ евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти сингулярные числа, норму, сингулярное и полярное разложения преобразования φ .

2. Найти сингулярные числа, норму, полярное и сингулярное разложения оператора φ , если

а) φ — линейное преобразование одномерного арифметического комплексного пространства со стандартным скалярным произведением, матрица которого равна (z) ;

б) φ — оператор дифференцирования на пространстве $\mathbb{R}[x]_1$ многочленов степени не выше единицы со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$;

в) φ — оператор проектирования на ось Ox параллельно прямой $x = 2y$ в арифметическом евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением.

3. Зад. 46.20 и 46.21 из [КЗ].

4. Доказать, что оператор φ в евклидовом (унитарном) пространстве обратим тогда и только тогда, когда его наименьшее сингулярное число σ отлично от нуля. В этом случае показать, что норма обратного оператора φ^{-1} равна $1/\sigma$.

5. Зад. 46.30 и 46.32 из [КЗ].

На месяц:

6. Докажите *миним.макс-* и *максимин-* формулы, характеризующие все (ненулевые) сингулярные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ оператора φ в n -мерном евклидовом (унитарном) пространстве:

$$\sigma_i = \min_{U \subseteq V, \dim U = n+1-i} \max_{x \in U, x \neq 0} \frac{|x\varphi|}{|x|} = \max_{U \subseteq V, \dim U = i} \min_{x \in U, x \neq 0} \frac{|x\varphi|}{|x|}.$$