Задачи 51

Коммутативная алгебра: нётеровы кольца

Теоретический материал: файл AN-54.pdf, гл. 9, § 4,6 из [ВИН].

Всюду в задачах (если не оговорено особо) A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, а K — поле.

К 08.10.2020:

Задачи:

1. Верны ли следующие утверждения:
а) если $A[x]$ нётерово, то A нётерово;
б) если $A[x]$ — кольцо главных идеалов, то A — поле.

2. Зад. 64.24 из [КЗ].

3. Доказать теорему Гильберта о базисе в следующей формулировке. Пусть A нётерово, и $M \subseteq A[x_1, \dots, x_n]$. Тогда найдется конечное подмножество $\{m_1, \dots, m_r\}$ в M такое, что каждый многочлен из $m \in M$ может быть представлен в виде: $m = m_1 a_1 + \ldots + m_r a_r$, где $a_i \in A[x_1, \dots, x_n], i = 1, \dots, r$.

4. Пусть I_0 множество всех многочленов из $K[x, y]$, свободный член которых равен нулю. Доказать, что I_0 — идеал в $K[x, y]$ и $I_0 = (x, y)$. Указать еще какой-нибудь базис этого идеала.

5. Найти четыре различных базиса идеала (x, y, z) в кольце $K[x, y, z]$.

6. Найти конечный базис идеала

$$I = \{f(x, y, z, t) \in K[x, y, z, t] \mid f(a, a, a, a) = 0 \text{ для любого } a \in K\},$$

где K — произвольное бесконечное поле.

На месяц:

7. Доказать (без предположения о нётеровости A), что в A найдется максимальный идеал.

8. Привести пример кольца A и его идеала I таких, что I не обладает конечным базисом.