Задачи 52

Коммутативная алгебра: алгебраические многообразия и радикальные идеалы

Теоретический материал: файл AN-55.pdf, гл. 9, § 6 из [ВИН], ПСШ, гл. 7, § 1, 2.

Всюду в задачах F — поле.

К 15.10.2020:

Задачи:

1. Доказать, что
а) конечный набор точек в F^n,
б) конечный набор подпространств в F^n
являются алгебраическими многообразиями;
в) а множество $\{(x, y) \mid y = \sin x\} \subseteq \mathbb{R}^2$ не является.

2. Найти систему алгебраических уравнений над $\mathbb{C}$, задающих алгебраическое многообразие, состоящее из точек $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$.

3. Найти $J(X)$, где X одно из следующих множеств:
а) $\{(x, y) \mid x^4 = y^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$;
б) $\{(x, y) \mid x^2 - 2xy + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$.

4. Упр. 3 из файла AN-55.pdf.

5. Доказать, что над $\mathbb{C}$ система

$$\begin{cases} x^2 + xy - y + 1 = 0, \\ x^3 - x^2 + x + y^3 = 0, \\ y^4 + x^3 + yx^3 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

несовместна, а системы

$$\begin{cases} x + 2y + 4yz^2 = 0, \\ 4xz^2 - y = 0, \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y + 4yz^2 = 0, \\ 4xz^2 - y = 0 \end{cases}$$

эквивалентны.

На месяц:

6. Рассмотрим кривую X в $\mathbb{C}^3$, заданную параметрически:

$$x = t^3, \quad y = t^4, \quad z = t^5, \quad t \in \mathbb{C}.$$

а) Доказать, что идеал $J(X)$ не порождается двумя элементами,
б) но порождается тремя.