

Задачи 53

Коммутативная алгебра: факториальные кольца

Теоретический материал: файл AN-56.pdf, гл. 9, § 7 из [ВИН].

Всюду в задачах A — целостное кольцо, F — поле.

К 22.10.2020:

Задачи:

1. Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n) - 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $\mathbb{Z}[x]$.
2. Доказать, что $f(x) = (x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n) + 1$, где c_i — различные целые числа, является простым элементом в кольце $\mathbb{Z}[x]$ при $n > 4$. Найти возможные разложения для f на простые множители при $n \leq 4$.
3. Зад. 2 и 3 из § 9.2 из [ВИН].
4. Найти радикал $r(I)$ идеала $I = (x^3 + 2x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + y^2z)$ в кольце $\mathbb{C}[x, y, z]$.
5. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] = \{a + b\sqrt{-p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ не является факториальным.

На месяц:

6. Изучить напечатанное мелким шрифтом в § 9.7 из [ВИН] (стр. 404-405). Решить задачи 3 и 4 из этого параграфа.