Задачи 54

Коммутативная алгебра: базисы Грёбнера – Ширшова

Теоретический материал: файл AN-57.pdf, гл. 7, § 3, 4 из [ПСШ], § 4.3-4.7, 5.1-5.3 и гл. 6 из [AP].

Всюду F — поле, а f_C — старший (относительно лексикографического порядка) одночлен многочлена f.

К 29.10.2020:

Задачи:

1. Пусть n — натуральное число, I — счётное множество, а $\mathcal{A} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ — семейство упорядоченных n-ок неотрицательных целых чисел. Доказать, что не существует бесконечной цепочки строго убывающих относительно лексикографического порядка элементов из $\mathcal{A}$.

Указание. Индукция по n.

2. Доказать предложение 1 из лекции (см. файл AN-57) об эквивалентности двух определений базиса Грёбнера идеала кольца $F[x_1, \ldots, x_n]$.

Указание. Воспользоваться утверждением задачи 1.

3. Доказать предложение 2 из лекции (см. файл AN-57) и показать с помощи него, что минимизация (упрощение 1) переводит базис Грёбнера снова в базис Грёбнера.

4. Показать, что алгоритм Бухбергера плюс минимизация есть

а) алгоритм Гаусса приведения системы к ступенчатому виду в случае систем линейных уравнений;

б) алгоритм Евклида нахождения НОД набора многочленов в случае многочленов от одной переменной.

5. В пункте а) задачи 4 переход к от минимального базиса к редуцированному (упрощение 2, см. файл AN-57) есть обратный ход метода Гаусса, приводящий систему линейных уравнений к унифицированному ступенчатому виду.

6. Доказать предложение 4 из лекции (файл AN-57): если многочлены $f, g \in F[x_1, \ldots, x_n]$ не имеют зацепления, т. е. $(f_C, g_C) = 1$, то f, g образуют базис Грёбнера идеала $I = (f, g)$.

7. Найти базис Грёбнера идеала $I \trianglelefteq F[x_1, \ldots, x_n]$ и редуцировать его, если

а) $I = (x^2 - 1, xy - y, xz + z)$;

б) $I = (x^2 - 1, xy - y, xz - z)$;

в) $I = (xy^2 - z - z^2, x^2y - y, y^2 - z^2)$.

8. Решить (с помощью базисов Грёбнера) над $\mathbb{C}$ системы алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} yz - x - z + xz = 0, \\ xy - y + z^2 + xz^2 = 0, \\ z - z^2 + x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xz - 2y + 1 = 0, \\ yz - 1 + z = 0, \\ yz + xyz + z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy^2 - z - z^2 = 0, \\ x^2y - y = 0, \\ y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$

На месяц:

9. Доказать теорему 8 из лекции (файл AN-57). Используя утверждение этой теоремы, указать алгоритм, определяющий лежит ли многочлен f в радикале идеала

$(f_1, \ldots, f_m) \trianglelefteq F[x_1, \ldots, x_n]$. Используя полученный алгоритм, указать алгоритм, устанавливающий эквивалентность двух систем алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.

10. Решить задачи 7 и 8 с помощью системы Singular: https://www.singular.uni-kl.de