

## Задачи 56

### Теория групп: коммутант, разрешимые группы

Теоретический материал: файлы AN-63.pdf; § 3.2 и 19.1 из [KM]; гл. 10 § 2 из [ВИН].

**К 19.11.2020:**

#### Задачи:

1. Зад. 62.1 из [КЗ].
2. Упр. 1 из лекции (см. файл AN-63), см. также упр. 3.2.5 из [KM].
3. Упр. 3.2.6 из [KM] и зад. 62.9 из [КЗ].
4. Упр. 62.6 и 62.11 из [КЗ], см. также упр. 2 из лекции (файл AN-63).
5. Зад. 62.7 и 62.12 из [КЗ].
6. В свободной группе  $F = F(x, y)$  найти шрайерову систему представителей по коммутанту  $F' = [F, F]$ . С ее помощью найти свободные порождающие группы  $F'$ .
7. Упр. 3 из лекции (файл AN-63), см. также зад. 62.13 из [КЗ].

#### На месяц:

8. Приведите пример группы, у которой в коммутанте есть элемент, не являющийся коммутатором.  
Указание. См. пример 3.2.9 и упр. 3.2.10 и 3.2.11 из [KM].
9. Пусть  $\gamma_1(G) = G$ ,  $\gamma_2(G) = [G, G]$ , и  $\gamma_{k+1}(G) = [\gamma_k(G), G]$ .
  - а) Докажите, что группа  $G$  нильпотентна (см. опр. 4 из лекции, файл AN-63) тогда и только тогда, когда найдется такое  $m$ , что  $\gamma_{m+1}(G) = 1$ . Точнее,  $\gamma_{m+1}(G) = 1 \iff Z_m(G) = G$ .
  - б) докажите, что группа верхних унитреугольных матриц над полем нильпотентна (сравни с зад. 62.13 б) из [КЗ]).