

Задачи 58

Теория групп: группы подстановок

Теоретический материал: файлы AN-66.pdf; § 12.3 и 6.2 из [KM].

К 03.12.2020:

Задачи:

1. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — транзитивная группа степени $p^k m$ (p — простое число). Если $P \in \text{Syl}_p(G)$, то длина любой орбиты группы P на Ω не меньше, чем p^k .
2. Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ — транзитивная группа, H — ее нормальная подгруппа. Если Δ и Γ — орбиты H на Ω , то группы H^Δ и H^Γ подстановочно изоморфны.
3. Найдите блоки, содержащие 1, в группе $G = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6)(3, 5) \rangle \leq S_6$.
4. Укажите какую-нибудь систему импримитивности группы симметрий куба, группы вращений куба. Укажите, в сплетения каких групп можно вложить группу симметрий и вращений куба.
5. Пусть Δ — нетривиальный блок для группы $G \leq \text{Sym}(\Omega)$. Если $G_{\{\Delta\}}$ имеет нетривиальную систему импримитивности Σ на Δ и $\Gamma \in \Sigma$, то Γ будет блоком и для G . В частности, Δ — минимальный блок тогда и только тогда, когда группа $G_{\{\Delta\}}$ примитивна на Δ .
6. Используя вложение Фробениуса, вложите группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и \mathbb{Z}_4 в сплетение $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$.
7. Упр. 1 а) и в) из лекции (файл AN-66).

На месяц:

8. Найдите силовские p -подгруппы в S_n при
а) $n = p^2$, б) $n = p^k$, в) n произвольно.
9. а) Пусть G действует транзитивно на множествах Ω и Γ , и H — стабилизатор точки в первом действии. Докажите, что эти действия эквивалентны тогда и только тогда, когда H — стабилизатор некоторой точки и во втором действии.
б) Покажите, что у группы S_6 имеется два неэквивалентных транзитивных представления степени 6, но их образы подстановочно изоморфны (ср. Упр. 1(б) из лекции).