

## Задачи 59

### Теория групп: простые группы

Теоретический материал: файлы AN-67.pdf; § 13 из [КМ]; гл. 10, § 5 из [ВИН].

**К 17.12.2020:**

Подготовиться к контрольной работе по теме «Теория групп».

**К 10.12.2020:**

**Задачи:**

1. Доказать, что с точностью до изоморфизма есть только одна неабелева простая группа порядка 60, в частности, группы  $A_5$ ,  $SL_2(\mathbf{F}_4)$  и  $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ , где  $\mathbf{F}_q$  — поле порядка  $q$ , изоморфны между собой. Вместе с утверждением задачи 10 из листка Problem57.pdf это означает, что наименьшая неабелева простая группа, изоморфна  $A_5$ .
2. Пусть  $p, q$  — различные простые числа,  $G$  группа порядка  $p^2q$ . Докажите, что либо силовская  $p$ -подгруппа, либо силовская  $q$ -подгруппа нормальна в  $G$ .
3. Пусть  $p, q$  — различные простые числа,  $G$  группа порядка  $p^3q$ . Докажите, что либо силовская  $p$ -подгруппа, либо силовская  $q$ -подгруппа нормальна в  $G$ , либо  $|G| = 24$ .
4. Найти неабелеву простую группу, порядок которой больше порядка  $A_5$ , но меньше порядка  $A_6$ .

**На месяц:**

5. Докажите, что группа  $PSU_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C})/Z(SU_2(\mathbb{C}))$  проста.
6. Докажите, что простая группа, удовлетворяющая условиям задачи 4 единственна (с точностью до изоморфизма).