Задачи

Февраль (группы)

Теоретический материал: гл. 9, из [ВМ], гл. 4 и гл. 10 § 1, 3 из [ВИН], доп. материалы: файлы AN-21 и AN-22.

1. Зад. 55.20 из [КЗ].

2. (А. А. Клячко) Назовем элемент группы *стойким*, если он остается на месте под действием всех автоморфизмов группы. Предположим, что в конечной группе G стойких элементов не меньше половины.

а) Докажите, что G абелева.

б) Найдите все такие группы G.

3. Упр. 9.2.2 из [ВМ].

4. Доказать следующие утверждения.

а) Пусть G — абелева группа порядка n. Тогда G циклическая тогда и только тогда, когда для каждого делителя k числа n группа G содержит ровно одну подгруппу порядка k.

б) В мультипликативной группе поля для любого натурального числа k существует не более одной подгруппы порядка k.

в) Всякая конечная подгруппа мультипликативной группы поля — циклическая. В частности, мультипликативная группа любого конечного поля — циклическая.

5. Зад. 58.7, 58.9 и 58.10 из [КЗ].

6. (А. А. Клячко) Покажите, что никакой автоморфизм неабелевой конечной группы не может больше трех четвертей элементов группы переводить в обратные к ним элементы.

7. (А. Ю. Ольшанский) Имеются группа G и два взаимно простых числа m и n такие, что $x^n y^n = y^n x^n$ и $x^m y^m = y^m x^m$ для любых $x, y \in G$. Докажите, что группа G абелева.

8. Опишите

а) группы симметрий и вращений куба и октаэдра,

б) группы симметрий и вращений икосаэдра и додекаэдра.

9. (Лемма Брауэра, 1969) Пусть H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда для любых $h \in H$ и $g \in G$ элементы $g^{|H|}$ и $(gh)^{|H|}$ сопряжены между собой с помощью элемента из H.

Указание: Для фиксированных $h \in H$ и $g \in G$ рассмотрите орбиту наименьшей длины относительно действия аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел на группе H, заданное правилом $x \circ i = g^{-i} x (gh)^i$ для любых $x \in H$ и $i \in \mathbb{Z}$.