Зад 1 Общее замечание: под заменой всегда понимается выражение старых переменных через новые („подставь и убедишься"), поскольку именно матрица этой замены составлена из строк (в системе вектор-строка) коор-т ортогонального базиса (см., напр., файл AG-3).

Трудности возникли у тех, кто решал вар 2 и вар 4.

Вар 4: $q(x) = x_1 x_2 - 2x_2 x_3 = xAx'$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечу сразу, что $\operatorname{rk}(A) = 2$ (очевидно). Поэтому сигнатура должна быть вида (i, j), где $i + j = 2$!

Т.к. нет чистых „квадратов", то первая замена:

$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$, т.е. $x = yT$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x) \underset{T}{\sim} q(y) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3 =$$

$$= \underbrace{(y_1 - y_3)}_{= z_1}^2 - \underbrace{(y_2 + y_3)}_{= z_2}^2 \underset{S}{\sim} z_1^2 - z_2^2 = q(z) \text{ — норм. вид.}$$

Сигнатура: $(1, 1)$. Замена
$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 - y_3 \\ z_2 &= y_2 + y_3 \\ z_3 &= y_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_3 \\ y_2 &= z_2 - z_3 \\ y_3 &= z_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = zS, \text{ где } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = yT = zST$$

$$ST = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — м-ца замены, т.е. } \begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 + 2z_3 \\ x_2 &= z_1 + z_2 \\ x_3 &= z_3 \end{aligned}$$

← строки — это ортог. базис соотв. квадр. функции!

ЗАД 2 (ВАР 1) Т.к. $(X,Y) = tr(X\cdot Y^*)$, то

$$(A,A) = tr\left(\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 1-i\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-i & 2\end{pmatrix} = 2+2=4$$

$\Rightarrow |A| = \sqrt{(A,A)} = 2 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2}A$ – нормир. в-р.

$(B,B) = \ldots = 8 \Rightarrow |B| = 2\sqrt{2}$.

$$(A,B) = tr\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & -i\\ 2-i & i\end{pmatrix} = (1+3i)+(i-1) = 4i \Rightarrow$$

$(B,A) = \overline{(A,B)} = -4i$. Ортогонализация:

$$B' = B - \frac{(B,A)}{(A,A)}A = \begin{pmatrix}-i & 2+i\\ i & -i\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1+i\\ i & -1\end{pmatrix}$$

$|B'| = \sqrt{(B',B')} = 2 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2}B'$ и $A_0 = \frac{1}{2}A$ – искомый базис.

ЗАД 3 Выберем произв. базис $V = \mathbb{R}[x]_1$: 1 и t и запишем м-цу билинейной ф-ции (в зависимости от c:)

$$A_c(1,t) = \begin{pmatrix} \alpha(1,1) & \alpha(1,t) \\ \alpha(1,t) & \alpha(t,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-\frac{c^2}{2} & \frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3} \\ \frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3} & \frac{c^3}{3}-\frac{c^4}{4} \end{pmatrix} \text{ — I вар и 3 вар}$$

(во 2-м и 4-м вариантах та же матрица $\times(-1)$).

При $c=1$ $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/12 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = \frac{1}{2}$ $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/24 \end{vmatrix} = \frac{1}{72}$

$\Rightarrow \frac{\delta_1}{\delta_0} = \delta_1 > 0$ и $\frac{\delta_2}{\delta_1} > 0 \Rightarrow$ сигнатура $(2,0)$.

Во 2-м и 4-м вар $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \delta_1 = -\frac{1}{2} < 0$ $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{-1/2}{1/72} < 0 \Rightarrow$ сигнатура $(0,2)$. Ортогонализация дает базис $e_1 = 1$ и $e_2 = t - \frac{1}{3}$. (во всех вариантах).

В п. б) α полож. опр-на $\Leftrightarrow$ угловые миноры $A > 0$

$\Leftrightarrow$ (1 ВАР) $\begin{cases} C > 0 \text{ — условие зад.} \\ C - C^2/2 > 0 \text{ (1 ВАР)} < 0 \text{ (2 ВАР)} \\ |A_c| > 0 \text{ (во всех варианта)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 1 ВАР $C \in (0, 2)$; 2 ВАР $C \in (2, +\infty)$

$\Rightarrow C^2 - 6C + 6 > 0$

$\Rightarrow C \in (-\infty, 3-\sqrt{3}] \cup (3+\sqrt{3}, +\infty)$

Ответ (1 и 3 ВАР): $C \in (0, 3-\sqrt{3})$

(2 и 4 ВАР): $C \in (3+3\sqrt{3}, +\infty)$

Посл. замечание: Полезно помнить, что м-ца симметрической билинейной (полуторалинейной) ф-ции — это м-ца Грама в соотв. базисе (и речь не обяз. идет о пол. опред. ф-ции!)

Зад. 4 из контр $\Rightarrow$ в месячные задания.