Контрольная работа: вариант 1

1. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп фактор-группу $G = F/H$, где F — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, H — ее подгруппа, порожденная элементами y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 8x_2 + 17x_3 \\ y_2 = 8x_1 + 5x_2 + 11x_3 \\ y_3 = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Указать порядок и период группы G.

2. Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M и N — A-модули. Пусть $H = \mathrm{Hom}(M, N)$ — множество всех гомоморфизмов из M в N. Известно, что H — абелева группа относительно операции, заданной правилом $x(\varphi + \psi) = x\varphi + x\psi$, где $x \in M$ и $\varphi, \psi \in H$.

а) Проверить, что H — A-модуль относительно операции, заданной правилом $x(\varphi \cdot a) = (x \cdot a)\varphi$, где $x \in M$, $a \in A$, $\varphi \in H$.

б) Доказать, что если M и N — конечно порожденные A-модули, то и H — конечно порожденный A-модуль.

3. Для системы S алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1 = y^2 + z = 0 \\ f_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ f_3 = x - y + z = 0 \end{cases}$$

а) найти редуцированный базис Грёбнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ относительно порядка $x > y > z$;

б) найти все решения системы S в $\mathbb{C}^n$.

4. Будет ли факториальным фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}[x, y]$ по идеалу $I = (x^2 + 1, xy + 1)$?

Контрольная работа: вариант 2

1. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп фактор-группу $G = F/H$, где F — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, H — ее подгруппа, порожденная элементами y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \\ y_2 = 7x_1 + 11x_2 + 8x_3 \\ y_3 = 5x_1 + 11x_2 + 6x_3. \end{cases}$$

Указать порядок и период группы G.

2. Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M и N — A-модули. Пусть $H = \mathrm{Hom}(M, N)$ — множество всех гомоморфизмов из M в N. Известно, что H — абелева группа относительно операции, заданной правилом $x(\varphi + \psi) = x\varphi + x\psi$, где $x \in M$ и $\varphi, \psi \in H$.

а) Проверить, что H — A-модуль относительно операции, заданной правилом $x(\varphi \cdot a) = (x \cdot a)\varphi$, где $x \in M$, $a \in A$, $\varphi \in H$.

б) Доказать, что если M и N — конечно порожденные A-модули, то и H — конечно порожденный A-модуль.

3. Для системы S алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1 = y^2 + x = 0 \\ f_2 = x - y + z = 0 \\ f_3 = x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

а) найти редуцированный базис Грёбнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ относительно порядка $x > y > z$;

б) найти все решения системы S в $\mathbb{C}^n$.

4. Будет ли факториальным фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}[x, y]$ по идеалу $I = (x^2 - 1, xy - 1)$?

Контрольная работа: вариант 3

1. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп фактор-группу $G = F/H$, где F — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, H — ее подгруппа, порожденная элементами y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\ y_2 = 5x_1 + 11x_2 + 8x_3 \\ y_3 = 8x_1 + 17x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Указать порядок и период группы G.

2. Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M и N — A-модули. Пусть $H = \mathrm{Hom}(M, N)$ — множество всех гомоморфизмов из M в N. Известно, что H — абелева группа относительно операции, заданной правилом $x(\varphi + \psi) = x\varphi + x\psi$, где $x \in M$ и $\varphi, \psi \in H$.

а) Проверить, что H — A-модуль относительно операции, заданной правилом $x(\varphi \cdot a) = (x \cdot a)\varphi$, где $x \in M$, $a \in A$, $\varphi \in H$.

б) Доказать, что если M и N — конечно порожденные A-модули, то и H — конечно порожденный A-модуль.

3. Для системы S алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1 = y^2 + z = 0 \\ f_2 = x + y - z = 0 \\ f_3 = x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

а) найти редуцированный базис Грёбнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ относительно порядка $x > y > z$;
б) найти все решения системы S в $\mathbb{C}^n$.

4. Будет ли факториальным фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}[x, y]$ по идеалу $I = (x^2 + 1, xy - 1)$?

Контрольная работа: вариант 4

1. Разложить в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп фактор-группу $G = F/H$, где F — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, H — ее подгруппа, порожденная элементами y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_1 = 11x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 11x_1 + 8x_2 + 7x_3. \end{cases}$$

Указать порядок и период группы G.

2. Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M и N — A-модули. Пусть $H = \mathrm{Hom}(M, N)$ — множество всех гомоморфизмов из M в N. Известно, что H — абелева группа относительно операции, заданной правилом $x(\varphi + \psi) = x\varphi + x\psi$, где $x \in M$ и $\varphi, \psi \in H$.

а) Проверить, что H — A-модуль относительно операции, заданной правилом $x(\varphi \cdot a) = (x \cdot a)\varphi$, где $x \in M$, $a \in A$, $\varphi \in H$.

б) Доказать, что если M и N — конечно порожденные A-модули, то и H — конечно порожденный A-модуль.

3. Для системы S алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1 = y^2 + x = 0 \\ f_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ f_3 = y + z - x = 0 \end{cases}$$

а) найти редуцированный базис Грёбнера идеала $I = (f_1, f_2, f_3)$ относительно порядка $x > y > z$;
б) найти все решения системы S в $\mathbb{C}^n$.

4. Будет ли факториальным фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}[x, y]$ по идеалу $I = (x^2 - 1, xy + 1)$?

Дополнительная задача:

5. Пусть G — подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, для которой найдется окрестность нуля U такая, что $U \cap G = 0$. Докажите, что G — свободная абелева группа и ее ранг не превосходит n.