Контрольная работа: вариант 1

1. Пусть v_i и u_i, $i = 1, \ldots, k$, — векторы конечномерных пространств V и U над полем F соответственно, причем $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} (v_i \otimes u_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_i = 0 \text{ для любого } i = 1, \ldots, k.$$

2. Пусть $t = e_1 \otimes e_2 \otimes (e^1 - e^2) \in T_1^2(V)$, где V — евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2.

а) Записать тот же тензор в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Записать в базисе $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ тензор $s \in T_2^1(V)$, полученный из t спуском первого индекса (метрический тензор — соответствующая базису $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ матрица Грамма).

3. Найти $\Lambda^3(A)$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

4. Для матрицы $A \in M_n(F)$ найти значение $t(A)$ линейной функции $t : M_n(F) \to F$, которая является сверткой тензора $s \in T_2^1(M_n(F))$ структурных констант алгебры $M_n(F)$.

Контрольная работа: вариант 2

1. Пусть v_i и u_i, $i = 1, \ldots, k$, — векторы конечномерного пространства V над полем F, причем $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} (v_i \vee u_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_i = 0 \text{ для любого } i = 1, \ldots, k.$$

2. Пусть $t = (e_1 - e_2) \otimes e^1 \otimes e^2 \in T_2^1(V)$, где V — евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2.

а) Записать тот же тензор в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Записать в базисе $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ тензор $s \in T_1^2(V)$, полученный из t подъемом первого индекса (метрический тензор — соответствующая базису $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ матрица Грамма).

3. Пусть V — вещественное пространство с базисом e_1, e_2, e_3. Найти координаты 3-вектора

$$(5e_1 - e_2) \wedge 2e_1 \wedge (e_1 - e_2 + 3e_3)$$

в соответствующем базисе пространства $\Lambda^3(V)$.

4. Для матрицы $A \in M_n(F)$ найти значение $t(A)$ линейной функции $t : M_n(F) \to F$, которая является сверткой тензора $s \in T_2^1(M_n(F))$ структурных констант алгебры $M_n(F)$.

Контрольная работа: вариант 3

1. Пусть v_i и u_i, $i = 1, \dots, k$, — векторы конечномерных пространств V и U над полем F соответственно, причем $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} (v_i \otimes u_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_i = 0 \text{ для любого } i = 1, \dots, k.$$

2. Пусть $t = (e_1 - e_2) \otimes e^1 \otimes e^2 \in T_2^1(V)$, где V — евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2.

а) Записать тот же тензор в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Записать в базисе $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ тензор $s \in T_1^2(V)$, полученный из t подъемом первого индекса (метрический тензор — соответствующая базису $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ матрица Грамма).

3. Найти $\Lambda^3(A)$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

4. Для матрицы $A \in M_n(F)$ найти значение $t(A)$ линейной функции $t : M_n(F) \to F$, которая является сверткой тензора $s \in T_2^1(M_n(F))$ структурных констант алгебры $M_n(F)$.

Контрольная работа: вариант 4

1. Пусть v_i и u_i, $i = 1, \dots, k$, — векторы конечномерного пространства V над полем F, причем $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{k} (v_i \vee u_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_i = 0 \text{ для любого } i = 1, \dots, k.$$

2. Пусть $t = e_1 \otimes e_2 \otimes (e^1 - e^2) \in T_1^2(V)$, где V — евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2.

а) Записать тот же тензор в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Записать в базисе $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ тензор $s \in T_2^1(V)$, полученный из t спуском первого индекса (метрический тензор — соответствующая базису $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ матрица Грамма).

3. Пусть V — вещественное пространство с базисом e_1, e_2, e_3. Найти координаты 3-вектора

$$(5e_1 - e_2) \wedge 2e_1 \wedge (e_1 - e_2 + 3e_3)$$

в соответствующем базисе пространства $\Lambda^3(V)$.

4. Для матрицы $A \in M_n(F)$ найти значение $t(A)$ линейной функции $t : M_n(F) \to F$, которая является сверткой тензора $s \in T_2^1(M_n(F))$ структурных констант алгебры $M_n(F)$.

Дополнительная задача:

5. Доказать, что алгебра Грассмана $\Lambda(V)$ комплексного пространства V изоморфна факторалгебре тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу, порожденному тензорами $x \otimes y + y \otimes x$ по всем $x, y \in V$.