Контрольная работа: вариант 1

1. Пусть G — нетривиальная конечная группа, а F — поле. Докажите, что групповая алгебра FG не является алгеброй с делением.

2. Пусть $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = z, z^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ — группа кватернионов порядка 8.

а) Найдите степени (комплексных) неприводимых представлений группы G и укажите размерность центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

б) Составьте таблицу характеров группы G.

в) Опишите неприводимые представления группы G явно (указав матрицы для порождающих элементов a и b).

г) Пусть ψ — неприводимое представление группы G, размерность которого больше 1, а $\varphi = \psi \otimes \psi$ — его (тензорный) квадрат. Разложите φ в сумму неприводимых представлений.

3. Докажите, что коммутант группы порядка 12 не может иметь индекс 2.

4. Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной группы G над полем F. Предположим, что

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \ldots \leq V_s = V$$

— ряд инвариантных (относительно φ) подпространств пространства V, причем для каждого $i = 1, \ldots, s$ факторпредставление $\varphi_{V/V_{i-1}}$ тривиально на V_i/V_{i-1}.

а) Докажите, что если характеристика поля F не делит $|G|$, то φ — тривиальное представление.

б) Верно ли заключение п. а), если характеристика поля делит $|G|$?

Контрольная работа: вариант 2

1. Пусть G — конечная группа, а F — поле. Докажите, что групповая алгебра FG имеет одномерный двусторонний идеал.

2. Пусть $G = A_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle$ — знакопеременная группа степени 4 (порядка 12).

а) Найдите степени (комплексных) неприводимых представлений группы G и укажите размерность центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

б) Составьте таблицу характеров группы G.

в) Опишите неприводимые представления группы G явно (указав матрицы для порождающих элементов a и b).

г) Пусть ψ — неприводимое представление группы G, размерность которого больше 1, а $\varphi = \psi \otimes \psi$ — его (тензорный) квадрат. Разложите φ в сумму неприводимых представлений.

3. Докажите, что коммутант группы порядка 12 не может иметь индекс 2.

4. Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной группы G над полем F. Предположим, что

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \ldots \leq V_s = V$$

— ряд инвариантных (относительно φ) подпространств пространства V, причем для каждого $i = 1, \ldots, s$ факторпредставление $\varphi_{V/V_{i-1}}$ тривиально на V_i/V_{i-1}.

а) Докажите, что если характеристика поля F не делит $|G|$, то φ — тривиальное представление.

б) Верно ли заключение п. а), если характеристика поля делит $|G|$?

Контрольная работа: вариант 3

1. Пусть G — нетривиальная конечная группа, а F — поле. Докажите, что групповая алгебра FG не является алгеброй с делением.

2. Пусть $G = A_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle$ — знакопеременная группа степени 4 (порядка 12).

а) Найдите степени (комплексных) неприводимых представлений группы G и укажите размерность центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

б) Составьте таблицу характеров группы G.

в) Опишите неприводимые представления группы G явно (указав матрицы для порождающих элементов a и b).

г) Пусть ψ — неприводимое представление группы G, размерность которого больше 1, а $\varphi = \psi \otimes \psi$ — его (тензорный) квадрат. Разложите φ в сумму неприводимых представлений.

3. Докажите, что коммутант группы порядка 18 не может иметь индекс 3.

4. Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной группы G над полем F. Предположим, что

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \ldots \leq V_s = V$$

— ряд инвариантных (относительно φ) подпространств пространства V, причем для каждого $i = 1, \ldots, s$ факторпредставление $\varphi_{V/V_{i-1}}$ тривиально на V_i/V_{i-1}.

а) Докажите, что если характеристика поля F не делит $|G|$, то φ — тривиальное представление.

б) Верно ли заключение п. а), если характеристика поля делит $|G|$?

Контрольная работа: вариант 4

1. Пусть G — конечная группа, а F — поле. Докажите, что групповая алгебра FG имеет одномерный двусторонний идеал.

2. Пусть $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = z, z^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ — группа кватернионов порядка 8.

а) Найдите степени (комплексных) неприводимых представлений группы G и укажите размерность центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

б) Составьте таблицу характеров группы G.

в) Опишите неприводимые представления группы G явно (указав матрицы для порождающих элементов a и b).

г) Пусть ψ — неприводимое представление группы G, размерность которого больше 1, а $\varphi = \psi \otimes \psi$ — его (тензорный) квадрат. Разложите φ в сумму неприводимых представлений.

3. Докажите, что коммутант группы порядка 18 не может иметь индекс 3.

4. Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной группы G над полем F. Предположим, что

$$0 = V_0 \leq V_1 \leq \ldots \leq V_s = V$$

— ряд инвариантных (относительно φ) подпространств пространства V, причем для каждого $i = 1, \ldots, s$ факторпредставление $\varphi_{V/V_{i-1}}$ тривиально на V_i/V_{i-1}.

а) Докажите, что если характеристика поля F не делит $|G|$, то φ — тривиальное представление.

б) Верно ли заключение п. а), если характеристика поля делит $|G|$?

Дополнительная задача:

5. Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной абелевой нециклической группы G над полем F, характеристика которого взаимно проста с $|G|$. Докажите, что

$$V = \sum_{x \in G^*} C_V(x),$$

где $G^* = G \setminus \{1\}$, а $C_V(x) = \{v \in V \mid v(x\varphi) = v\}$.