Пусть заданы множества $X \neq \emptyset$ и $S \subseteq X^* \times X^*$. По указанным исходным данным построим орграф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, S)$ следующим образом. Множество вершин этого орграфа совпадает с X^*. Две вершины u и v соединены дугой $\langle u, v\rangle$ тогда и только тогда, когда существуют слова $w, w' \in X^*$ и пара $\langle p, q\rangle \in S$ такие, что $u = wpw'$ и $v = wqw'$.

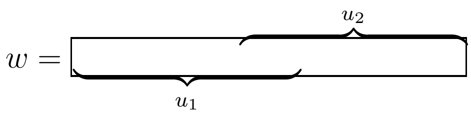
Орграф называется *переписывающим* (или *переписывающей системой*), если в нем нет бесконечных цепей (ориентированных путей). *Терминальные* вершины — это вершины, из которых не выходит ни одной дуги.

Для любой вершины u переписывающей системы $\mathcal{G}$ определено непустое множество $T_{\mathcal{G}}(u)$, состоящее из таких терминальных вершин t, для которых существует цепь из u в t. Переписывающая система $\mathcal{G}$ называется *конфлюэнтной*, если $T_{\mathcal{G}}(u)$ для любой вершины u состоит ровно из одного элемента.

Если $\mathcal{G}(X, S)$ — конфлюэнтная переписывающая система, то S называется *базисом Грёбнера — Ширшова.*

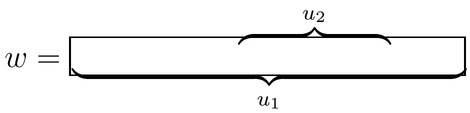
Для проверки конфлюэнтности переписывающей системы $\mathcal{G}(X, S)$, построенной по алфавиту X и множеству пар S (рассматриваемому как набор *правил* $u \to v$ для $(u, v) \in S$), необходимо и достаточно рассмотреть все *неопределенности*, т.е. слова вида

1) $w = u_1u' = u''u_2$, где правила $u_1 \to v_1$ и $u_2 \to v_2$ входят в S и сумма длин u_1 и u_2 строго больше, чем длина w. Проще говоря, это такие слова, что



(с непустым пересечением).

2) $w = u_1 = u'u_2u''$, где правила $u_1 \to v_1$ и $u_2 \to v_2$ входят в S. Проще говоря, это такие слова, что



Затем к каждому такому w надо применить сперва правило $u_1 \to v_1$, потом $u_2 \to v_2$ и убедиться, что два получающихся слова можно переписать (т.е. перейти по дугам) к одинаковому виду.

Упражнение. Пусть $X = \{a, b, c\}$, S состоит из правил

$$a^2 \to 1, \quad b^2 \to 1, \quad c^2 \to 1,$$

$$ba \to cabc, \quad bca \to acb.$$

Докажите, что $\mathcal{G}(X, S)$ — конфлюэнтная переписывающая система.

Замечание. Длина слова при переходе по дуге может увеличиваться. Поэтому то, что в графе $\mathcal{G}(X,S)$ нет бесконечных цепей, тоже нуждается в обосновании.

Пример неопределенности: $w = bbca$: $u_1 = b^2$, $u_2 = bca$. "Развилка":

$$\begin{tikzcd} bbca \arrow[r] \arrow[d] & ca \\ bacb & \end{tikzcd}$$

Проверяем:

$$bacb \to cabccb \to cabb \to ca$$

— все сходится к ca. Надо выписать все остальные неопределенности и просчитать их развилки.

Задача. Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Возьмем алфавит

$$X = \{x_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

и определяющие соотношения S состоящие из:

$$x_{ij}^2 = 1 \text{ для всех } i < j;$$

$$x_{ij}x_{kl} = x_{kl}x_{ij} \text{ для } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset;$$

$$x_{ij}x_{kl}x_{pq} = x_{pq}x_{kl}x_{ij}$$

для всех таких i,j,k,l,p,q, что пары $\{i,j\}, \{k,l\}, \{p,q\}$ получаются из какого-то 3-элементного множества выбрасыванием одного индекса, например

$$x_{12}x_{13}x_{23} = x_{23}x_{13}x_{12}, \quad x_{13}x_{12}x_{23} = x_{23}x_{12}x_{13},$$

и т.д.

Найдите базис Грёбнера — Ширшова моноида (на самом деле — группы), порожденного X с соотношениями S.

Замечание. Для $n = 3$ это в точности пример из упражнения. Для $n > 3$ ответ пока неизвестен. Можно ли выбрать переписывающие правила так, чтобы в БГШ их было конечное число (как в упражнении)?