Пусть $V = \mathbb{Z}^n$ — прямое произведение n копий группы $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Рассмотрим подгруппу W группы V, порождающие элементы которой, с точностью до перестановки координат имеют следующий вид:

- $(1, 0, \ldots, 0)$,
- $(2, 0, \ldots, 0)$,
- $(1, 1, 0, \ldots, 0)$,
- $(1, -1, 0, \ldots, 0)$,
- $(2, -1, 0, \ldots, 0)$,
- $(1, 1, -1, 0 \ldots, 0)$,
- $(2, -2, 0, \ldots, 0)$,
- $(2, -1, -1, 0, \ldots, 0)$,
- $(1, 1, -1, -1, 0 \ldots, 0)$.

Упражнение 1. Если факторгруппа V/W конечна, то $|V/W| \leqslant 2^n$.

Упражнение 2. Если число k выбрано так, что $k \leqslant 2^n$, то существует такая подгруппа W с порождающими указанного выше вида, что V/W изоморфна $\mathbb{Z}_k$ (циклической группе порядка k).

Из этих двух упражнений следует, что если число n разложить в сумму $n = n_1 + \ldots + n_l$ и выбрать числа $k_1 \leqslant 2^{n_1}, k_2 \leqslant 2^{n_2}, \ldots, k_l \leqslant 2^{n_l}$, то существует подгруппа W с порождающими указанного выше вида такая, что V/W изоморфна $\mathbb{Z}_{k_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{k_l}$.

Гипотеза. Группа V/W может быть изоморфна только указанным выше группам и никаким другим.

Частные случаи, с которых можно начать доказательство гипотезы, каждый из которых может быть темой курсовой работы. Без помощи компьютерных вычислений ответить, может ли группа V/W быть изоморфна

1. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, если $n = 5$?
2. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{25}$, если $n = 7$?
3. $\mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17}$, если $n = 9$?