Программа курса высшей алгебры

для исследовательской группы

Лектор: проф. Васильев А.В.

2019–21 учебные годы

1 семестр

1. Введение

Множества, отображения, алгебраическая операция, алгебраическая система, сужение операции на подмножество, подсистема, изоморфизм (ВЛМ, гл. 1; ВИН, гл. 1, § 1,4; КОС1, гл. 1, § 5, гл. 4, § 1).

2. Основные алгебраические структуры

Группа, кольцо, поле: аксиомы, элементарные свойства, элементарные примеры, абелевы группы, числовые алгебраические системы (ВЛМ, гл. 2, § 1; ВИН, гл. 1, § 2,3). Отношение эквивалентности, факторизация, кольца вычетов, простые поля. (ВИН, гл. 1, § 3, 6; КОС1, гл. 1, § 6, гл. 4, § 3 п. 2). Векторные пространства и алгебры над полем: аксиомы, примеры, понятие подпространства, фактор-пространства, подалгебры, базисы, изоморфизм (ВИН, гл. 1, § 7, 8; ВЛМ, гл. 3, § 1). Группа подстановок: проверка аксиом, разложение подстановки в произведение циклов, декремент, четность, разложение в произведение транспозиций, четность произведения, знакопеременная группа (ВЛМ, гл. 2, § 2). Пространство прямоугольных матриц и алгебра квадратных матриц: проверка аксиом, разложение матрицы в произведение элементарных и диагональной матриц (ВЛМ, гл. 2, § 3; ВИН, гл. 1, § 9). Определитель, его поведение при простейших преобразованиях. Определитель произведения матриц. Разложение определителя по строке (столбцу) (ВЛМ, гл. 2, § 4; КОС1, гл. 3). Обратная матрица: существование, вычисление, решение линейных матричных уравнений (ВЛМ, гл. 2, § 4). Поле комплексных чисел: существование, единственность, определение алгебры кватернионов. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корня n-ой степени из комплексного числа (ВЛМ, гл. 2, § 5; ВИН, гл. 1, § 5).

3. Начала линейной алгебры

Системы линейных уравнений: векторная и матричная формы, ступенчатая матрица и метод Гаусса поиска общего решения системы, однородная система и ее основное свойство, формулы Крамера для решения определенной системы (ВИН, гл. 2, § 1; ВЛМ, гл. 4, § 2). Базис и размерность векторного пространства: линейные комбинации, линейная зависимость, эквивалентные наборы векторов, основная лемма о линейной зависимости, эквивалентные определения базиса пространства, теорема о существовании базиса, размерность, координаты, изоморфизм пространств одной размерности. Матрица перехода, ее невырожденность, связь между координатами в разных базах (ВЛМ,

гл. 3, § 2; ВИН, гл. 2, § 2). Ранг системы векторов и строчный ранг матрицы: совместность и определенность системы линейных уравнений в терминах ранга, теорема Кронекера—Капелли (ВИН, гл. 2, § 2). Подпространство, базис, согласованный с подпространством, взаимное расположение подпространств, сумма и пересечение подпространств, связь между их размерностями, прямая сумма, базис фактор-пространства и критерий максимальности флага подпространств (ВЛМ, гл. 3, § 3; ВИН, гл. 5, § 1). Линейные отображения и преобразования: примеры, в том числе определение линейной функции, матрицы линейного отображения и линейного преобразования, изоморфизмы пространства отображений и пространства прямоугольных матриц, алгебры линейных преобразований и алгебры квадратных матриц, лемма об умножении матриц линейных отображений. Ядро и образ линейного отображения, инъективные линейные отображения и невырожденные линейные преобразования, сумма размерностей ядра и образа (ВИН, гл. 2, § 2, ВЛМ, гл. 6, § 1,2). Однородные системы линейных уравнений: пространство решений, фундаментальный набор решений, связь между однородными и неоднородными системами (ВЛМ, гл. 4, § 3; ВИН, гл. 2, § 3). Теорема о совпадении строчного и столбцевого ранга, ранг суммы и произведения матриц, минорный ранг и совпадение трех определений ранга матрицы (ВИН, гл. 2, § 3,5).

4. Начала коммутативной алгебры

Многочлены от одной переменной: определение, кольцо многочленов над кольцом и алгебра многочленов над полем, степень суммы и произведения многочленов, теорема о делении с остатком (ВЛМ, гл. 5, § 1,2; ВИН, гл. 3, § 1). Делимость в евклидовых кольцах: целостные и евклидова кольца, делитель, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида, взаимная простота, разложение на простые множители (ВЛМ, гл. 5, § 2; ВИН, гл. 3, § 5). Значения и корни многочленов: теорема Безу, кратные корни, теорема о числе корней, интерполяционный многочлен Лагранжа, производная и ее приложения в теории многочленов, формула Тейлора, интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестра (ВЛМ, гл. 5, § 3; ВИН, гл. 3, § 2). Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, элементарные свойства, лексикографическое упорядочение одночленов, старший одночлен, симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах (ВЛМ, гл. 5, § 4; ВИН, гл. 3, § 7, 8). Идеал коммутативного кольца и фактор-кольцо. Фактор-кольцо по максимальному идеалу и поле вычетов. Фактор-кольцо евклидова кольца по идеалу, порожденному простым элементом, и теорема о существовании корня многочлена в расширении поля, ее следствия: разложение на линейные множители в расширении поля, формулы Виета (ВЛМ, гл. 5, § 5, ВИН, гл. 9, § 2,5). Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел (ВЛМ, гл. 5, § 4; ВИН, гл. 3, § 3). Оценка числа действительных корней: границы корней, ряд Штурма и теорема Штурма (КОС1, гл. 6, § 4.3). Поле частных и поле рациональных дробей, основная теорема о рациональных дробях (ВИН, гл. 3, § 10, КОС1, гл. 5, § 4). Разложимость многочлена над полем рациональных чисел: сведение к многочленам с целочисленными коэффициентами, признак неразложимости над кольцом целых чисел и существование неразложимого многочлена произвольной степени, алгоритмическая разрешимость проблемы разложения многочлена над полем рациональных чисел (ВЛМ, гл. 5, § 4; ВИН, гл. 3, § 6).

2 семестр

5. Начала теории групп

Группы и их подгруппы: примеры, группы в геометрии и физике (ВЛМ, гл. 9, § 1; ВИН, гл. 4, § 1,2; файл AN-21 на сайте). Порождающее множество и циклическая подгруппа (ВЛМ, гл. 9, § 2; ВИН, гл. 4, § 3,4). Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы и теорема Лагранжа. Сопряженные элементы, коммутаторы, нормальные подгруппы и фактор-группы (ВЛМ, гл. 9, § 3; ВИН, гл. 4, § 5). Гомоморфизмы групп: примеры. Теоремы о гомоморфизмах (ВЛМ, гл. 9, § 4; ВИН, гл. 4, § 6). Прямые произведения групп, связь между двумя определениями. Разложение циклической группы конечного порядка в прямое произведение примарных подгрупп (ВЛМ, гл. 9, § 5; ВИН, гл. 10, S 1). Действие группы на множестве. Стабилизатор и орбита, связь между их порядками. Теорема Бернсайда о количестве орбит и ее применение к задаче о раскраске тетраэдра (ВЛМ, гл. 9, § 6; ВИН, гл. 10, S 3). Полупрямое произведение групп: примеры, связь между двумя определениями (файл AN-22; ВИН, гл. 10, § 1) Дополнительно см. также КМ, гл. 1,2; КОС1, гл. 4, § 2; КОС3, гл. 1; ВДВ, гл. 2, MI, Ch. 1-4.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Инвариантное пространство, ограничение на него линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, характеристический многочлен (ВЛМ, гл. 6, § 3; ВИН, гл. 6, § 1,2). Корневые подпространства, разложение в прямую сумму корневых подпространств (ВЛМ, гл. 6, § 4; ВИН, гл. 6, § 4). Нильпотентное ЛП, разложение в прямую сумму циклических подпространств (ВЛМ, гл. 6, § 5; ВИН, гл. 6, § 4). Жорданова база пространства. Жорданова форма матрицы (ВЛМ, гл. 6, § 5; ВИН, гл. 6, § 4). Многочлены от матриц и линейных преобразований. Минимальный аннулирующий многочлен, теорема Гамильтона — Кэли, теорема о ядерном разложении. Функции от матриц и линейных преобразований, представления их значений значениями многочленов (ВЛМ, гл. 6, § 7; ВИН, гл. 6, § 5). Дополнительно см. также КОС2, гл. 2; Ч; ЧП; М, § 8-16; ШР, гл. 4,5; КосМ, ч. 1.

7. Преобразования пространств со скалярным произведением

Линейные функции, сопряженное пространство, сопряженное отображение (ВИН, гл. 5, § 2; файл AN-31). Билинейные функции: симметрические, кососимметрические, квадратичные функции, ортогональный и симплектический базисы, алгоритм Лагранжа, метод ортогонализации Грама-Шимдта, метод Якоби и критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной функции (ВИН, гл. 5, § 3; файл AN-32; ВЛМ, гл. 8, § 1). Полуторалинейные функции (файл AN-33; ВИН, гл. 5, § 5). Евклидовы и унитарные пространства: аксиомы, примеры. Матрица Грама, неравенство Коши – Буняковского, ортонормированный базис, изоморфизм пространств одинаковой размерности, ортогональное дополнение к подпространству, расстояние, понятие метрического пространства (файл AN-34; ВЛМ, гл. 7, § 1; ВИН, гл. 5, § 4,5). Сопряженные преобразования: связь между матрицами. Нормальные преобразования, свойство их собственных

векторов векторов, канонический вид матрицы нормального преобразования в унитарном и евклидовом пространстве (ВЛМ, гл. 7, § 2; файл AN-35). Унитарные, ортогональные, самосопряженные и косоэрмитовы преобразования, их матрицы, канонический вид унитарного, ортогонального, самосопряженного и косоэрмитова преобразований (ВЛМ, гл. 7, § 3,4; ВИН, гл. 6, § 3; файлы AN-36,37). Приведение квадратичной функции к главным осям, одновременная диагонализации пары квадратичных функций (ВЛМ, гл. 8, § 2,3; файл AN-37). Неотрицательные самосопряженные преобразования, сингулярные числа, полярное и сингулярное разложение матрицы (ВЛМ, гл. 7, § 5, файл AN-38, ВИН, гл. 6, § 3). Дополнительно см. также КОС2, гл. 1, § 3,4 и гл. 3; ЖЧ; М, § 17-20; ШР, гл. 6,7; КосМ, ч. 2.

8. Аффинные и проективные преобразования

Аффинные пространства и аффинные отображения, дифференциал аффинного отображения, изоморфизм пространств одной размерности. Группа аффинных преобразований, ее строение и основные свойства (файл AN-41; ВИН, гл. 7, § 1,3). Евклидово аффинное пространство, эквивалентные определения движения, группа движений, ее строение и основные свойства, плоскость, характеризующая движение, и классификация движений пространств небольшой размерности (файл AN-41; ВИН, гл. 7, § 1,3). Проективные пространство, аффинная карта, координаты, полная проективная группа проективного пространства ее структура и основные свойства (файл AN-43; ВИН, гл. 7, § 5). Дополнительно см. также КОС2, гл. 4 и гл. 5, § 3; ШР, гл. 8,9; КосМ, ч. 3.

3 семестр

9. Коммутативная алгебра

Свободные абелевы группы и их подгруппы (КМ, § 7), теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (КМ, § 8; ВИН гл. 9, § 1). Гомоморфизмы колец и алгебр, прямое произведение колец, кольцо главных идеалов и его свойства (ВИН, гл. 9, § 2). Модули над кольцами, гомоморфизмы модулей, циклические модули, строение конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов (ВИН, гл. 9, § 3; КОС3, гл. 4, § 1.1). Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе, нильпотентный радикал (ВИН, гл. 9, § 4). Системы алгебраических уравнений, аффинное алгебраическое многообразие, идеал системы, идеал многообразия, эквивалентные системы, радикал идеала, теорема Гильберта о нулях (ПСШ, гл. 7, § 1, 2; ВИН гл. 9, § 6). Задача вхождения и базис Грёбнера идеала, базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений (ПСШ, гл. 7, § 3, 4). Алгоритм Бухбергера и его обоснование, редуцированный базис Грёбнера (АР, гл. 4, § 5,6). Факториальные кольца, факториальность кольца многочленов над полем, примеры нефакториальных колец (ВИН гл. 9, § 7). Дополнительно см. также АР, гл. 1–6; КОС3, гл. 2, § 3, гл. 4, § 1–3; ЧБГ.

10. Теория групп

Свободные группы и их матричное представление, задание группы порождающими элементами и определяющими соотношениями, подгруппы свободных групп и теорема Нильсена – Шрайера (КМ, § 14). Коммутант группы, разрешимые и нильпотентные группы (ВИН, гл. 10, § 2). Конечные группы: композиционный ряд и теорема Жордана – Гёльдера, теоремы Силова (КМ, § 4.4, § 11; ВИН, гл. 10, § 4). Группы подстановок: подстановочный изоморфизм, транзитивность и представления подстановок смежными классами, системы импримитивности (КМ, § 12.3) и сплетение, вложение Фробениуса (КМ, § 6.2), лемма Ивасавы (КМ, § 13.2), простота группы A_n при $n \geq 5$ (КМ, § 13.1; ВИН гл. 10, § 5). Простые матричные группы: теорема Жордана – Диксона (КМ, § 13.2) и простота группы SO(3) (ВИН гл. 10, § 5). Дополнительно см. также БГП, гл. 1, § 7–15 и гл. 2, § 1–9; КОС3, гл. 2, § 1–3; Ш, § 16.

11. Основы теории Галуа

Расширения полей: простые, конечные, алгебраические; поле разложения многочлена и его единственность (ВДВ, § 39–41; ВИН, гл. 9, § 5). Расширения колец: целые, конечные, целозамкнутые [ВИН, гл. 9, § 5]. Конечно порожденные алгберы: базис трансцендентности, лемма Нётер о нормализации (ВИН, гл. 9, § 6). Поля Галуа и их автоморфизмы (ВДВ, § 43; ВИН, гл. 9, § 5). Сепарабельность (ВДВ, § 44), совершенные и несовершенные поля (ВДВ, § 45). Теорема о примитивном элементе (ВДВ, § 46). Расширение Галуа и группа Галуа, нормальснoть и сепарабельность, как достаточные условия для расширения Галуа (ВДВ, § 57; ВИН, гл. 10, § 6). Основная теорема теории Галуа (ВДВ, § 58). Критерий Галуа разрешимости уравнений в радикалах (ВДВ, § 62, 63). Разрешимость уравнений в квадратных радикалах и задачи на построение (ВДВ, § 65), новое доказательство основной теоремы алгебры (ВИН, гл. 10, § 7). Дополнительно см. также Л, гл. 7, 8; КОС3, гл. 5; Ш, § 18.

4 семестр

12. Полилинейная алгебра

Понятие полилинейного отображения векторных пространств. Тензорное произведение векторных пространств: определение, существование и единственность, основной принцип тензорной алгебры (файл AN-81; ВИН, гл. 8, § 1), другие подходы к определению тензорного произведения пространств (КосМ, ч. 4, § 1). Пространство тензоров: валентность, ковариантные и контравариантные тензоры. Операции на тензорах: тензорное произведение и свертка. Координаты тензора: замена координат при переходе к новому базису, координаты тензорного произведения и свертки, метрический тензор, спуск и подъем индекса (файл AN-81; ВИН, гл. 8, § 1,2; КосМ ч. 4, § 4; Кос2, гл. 6, § 1). Тензорная алгебра: определение и универсальное свойство, тензорная алгебра как алгебра многочленов от некоммутирующих переменных, тензор структурных констант произвольной алгебры (файл AN-83; ВИН, гл. 8, § 2). Симметрические и кососимметрические полилинейные отображения. Симметрическая и внешняя степень векторного

пространства и их универсальность. Симметрическая алгебра и внешняя алгебра (алгебра Грассмана) и их свойства. Симметрические и кососимметрические тензоры, операции симметрирования и альтернирования. Теорема о соответствии между p-мерными подпространствами пространства и разложимыми p-векторами его алгебры Грассмана (файл AN-91.pdf; ВИН, гл. 11, § 1; Кос2, гл. 3, § 1). Дополнительно см. также КосМ, ч. 4; Кос2, гл. 6; Ш, § 8.

13. Линейные представления и ассоциативные алгебры

Понятие линейного представления: представление группы, кольца, алгебры, морфизм и эквивалентность представлений. Инвариантные представления: подпредставление и факторпредставление, приводимость и разложимость представлений. Неприводимые представления: лемма Шура и ее следствия (пропорциональность неприводимых представлений и одномерность неприводимого представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем). Сумма и тензорное произведение представлений, изотипные компоненты представления, лемма Бернсайда (файл AN-91; ВИН, гл. 11, § 1). Полная приводимость линейных представлений: эквивалентные определения, лемма о неподвижной точке и теорема Машке для конечных групп (файл AN-91; ВИН, гл. 11, § 1,2). Конечномерные ассоциативные алгебры и их неприводимые представления: нильпотентный радикал, полупростая и простая алгебры, критерий полупростоты, строение простой алгебры и ее нетривиальное неприводимое представление, структура полупростой алгебры и ее неприводимых представлений над алгебраически замкнутым полем (ВИН, гл. 11, § 3). Групповые алгебры и линейные представления конечных групп: полупростота групповой алгебры над полем, характеристика которого не делит порядок группы, теорема о числе и размерностях неприводимых представлений, понятие характера представления, неприводимые характеры и их свойства, примеры (ВИН, гл. 11, § 4). Алгебры с делением: теоремы Фробениуса и Веддерберна (ВИН, гл. 11, § 6). Дополнительно см. также Кос3, гл. 3 и гл. 4, § 4; Gor, Ch. 3, § 1-3, Ch. 4, § 1,2; Ш, § 17.

14. Топологические группы и их представления

Понятие топологической группы, компактные топологические группы, полная приводимость вещественных и комплексных представлений компактной группы (ВИН, гл. 11, § 2). Группы Ли, линейные группы Ли и их простейшие свойства, примеры (ВИН, гл. 12, § 1). Группа Ли и ее касательная алгебра: экспоненциальное отображение, касательная алгебра Ли и ее свойства (ВИН, гл. 12, § 2,3). Линейные представления группы Ли и ее касательной алгебры, редуктивные группы Ли и полная приводимость их линейных представлений (ВИН, гл. 12, § 3,4). Дополнительно см. также Кос3, гл. 2, § 4; Ш, § 15,17.

Основная литература

[ВЛМ] А. В. Васильев, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: конспект лекций. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2020.

[ВИН] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.

[КМ] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.

[КОС1] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КОС2] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КОС3] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[КЗ] Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. – 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Дополнительная литература

[АР] И. В. Аржанцев. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. М. : МЦНМО, 2003.

[МГУ] И. В. Аржанцев, В. В. Батырев, Е. И. Бунина и др. Студенческие олимпиады по алгебре на мехмате МГУ. М.: МЦНМО, 2012.

[БЛМ] В. Г. Бардаков. Лекции по алгебре Ю. И. Мерзлякова: Учебное пособие. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2012.

[БГП] О. В. Богопольский. Введение в теорию групп. — Москва–Ижевск: Ин-т комп. технологий, 2002.

[ВДВ] Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. — М.: Наука, 1976.

[ВМ] А. В. Васильев, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: Конспект лекций. Ч. 1. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2010.

[ЖЧ] В. Н. Желябин, В. А. Чуркин. Линейные преобразования евклидовых пространств. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[КОС] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

[КосМ] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. 4-е изд. — М.: Лань, 2008.

[КУР] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.

[Л] С. Ленг. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[М] А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.

[ПСШ] А. П. Пожидаев, С. Р. Сверчков, И. П. Шестаков. Лекции по алгебре: Учебное пособие для студентов 1 курса ММФ НГУ. Ч. 1,2. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2011.

[Пр] И. В. Проскуряков (ред.). Сборник задач по линейной алгебре, – 9-е изд. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2005.

[Ф] Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

[ФС] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977.

[Ч] В. А. Чуркин. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1991.

[ЧЗ] В. А. Чуркин. Задания по алгебре для 1 курса ММФ. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2007.

[ЧП] В. А. Чуркин. Задача о подобии для линейных операторов. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[ЧБГ] В. А. Чуркин. Системы полиномиальных уравнений, идеалы и их базисы делители. — Новосибирск: Метод. пособие ММФ НГУ (см. сайт кафедры).

[Ш] И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1986, Т. 11, 5–279.

[ШР] И. Р. Шафаревич, А. О. Ремезов. Линейная алгебра и геометрия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[Gor] D. Gorenstein, Finite Groups. — 2 ed. — AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2007.

[MI] M. Isaacs, Algebra: a graduate course. — Graduate studies in Mathematics, Vol. 100, AMS, 2009.