

# Программа курса математики для двухгодичного потока СУНЦ НГУ

2004-2006 уч. гг.

*Лектор: к.ф.-м.н. А. В. Васильев*

## Лекции

### I семестр

#### 1. Метод математической индукции (2 часа).

Описание метода. Примеры применения: доказательства некоторых формул суммирования, неравенств и т.п.

#### 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей (6 часов).

Элементы комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания. Определение их числа. Примеры задач.

Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Вычисление коэффициентов бинома. Число подмножеств конечного множества.

Понятие вероятности события, примеры. Формулы сложения и умножения вероятностей, условия их применения. Условная вероятность.

#### 3. Элементы логики и теории множеств (6 часов).

Понятие высказывания. Логические связки. Необходимость и достаточность.

Понятие множества. Основные операции над множествами и их свойства.

Понятие бинарного отношения. Определение функции как бинарного отношения.

Отношение эквивалентности. Теорема о разбиении множества на классы эквивалентности. Примеры.

Отношение порядка. Примеры.

#### 4. Основания геометрии (4 часа).

Исторический очерк. Основы аксиоматического метода. Аксиомы планиметрии и стереометрии.

Проблема равенства в геометрии.

Понятие о проектировании и проекции. Многогранники и их изображения на плоскости. Метод следов.

#### 5. Натуральные числа (4 часа).

Аксиомы множества натуральных чисел. Определение операций сложения и умножения, их основные свойства.

Отношение порядка в множестве натуральных чисел. Теорема о сравнимости любых двух натуральных чисел. Существование наименьшего числа в любом непустом подмножестве.

#### 6. Целые числа. Основы теории чисел (6 часов).

Схема построения множества целых чисел. Определение сложения и умножения, их свойства. Существование разности.

Отсутствие делителей 0 в множестве целых чисел. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Теорема о представлении наибольшего общего делителя двух целых чисел в виде их линейной комбинации. Следствия.

Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Малая теорема Ферма.

Сравнения. Функция Эйлера. Решение сравнений первой степени с одним неизвестным.

#### 7. Рациональные числа (2 часа).

Схема построения множества рациональных чисел. Определение сложения и умножения, их основные свойства. Теорема о существовании частного. Отношение порядка.

Резерв. Понятие мощности множества.

Множества одинаковой мощности. Теорема Кантора–Бернштейна. Счетные множества. Несчетность множества действительных чисел.

## II семестр

#### 8. Действительные числа (8 часов).

Задача измерения длины отрезка. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Существование несоизмеримых отрезков.

Бесконечные десятичные дроби как результат измерения длины отрезков. Периодичность дробей, соответствующих рациональной длине отрезка. Отсутствие периодов, состоящих из одних девяток.

Определение действительных чисел. Отношение порядка. Числовая прямая.

Теорема о разделяющем числе. Достаточное условие единственности разделяющего числа.

Определение сложения действительных чисел. Свойства операции сложения. Существование разности. Абсолютная величина числа.

Определение умножения действительных чисел. Свойства операции умножения. Деление на число, отличное от 0.

9. Предел числовой последовательности (6 часов).

Определение предела числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность последовательности, имеющей предел.

Бесконечно малые последовательности, их свойства.

Предел суммы, произведения, частного.

Пределный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

Вычисление предела последовательности  $q^n$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $|q| < 1$ ). Сумма бесконечной геометрической прогрессии. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Существование точной верхней и нижней граней ограниченного числового множества. Предел монотонной ограниченной последовательности.

Предел последовательности  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Число  $e$ .

10. Длина окружности и дуги окружности (4 часа).

Свойства периметров выпуклых многоугольников. Определение длины окружности. Число  $\pi$ . Длина окружности как предел периметров вписанных правильных  $2^n$ -угольников. Определение длины дуги окружности. Аддитивность длины. Радианная мера угла.

11. Тригонометрические функции (4 часа).

Определение основных тригонометрических функций. Вывод основных тождеств и формул преобразования. Преобразования формул вида  $A \cos x + B \sin x$ . Периодические функции. Периодичность основных тригонометрических функций, их графики (без детального исследования).

Понятие о взаимно однозначном отображении. Определение обратной функции. Арифметический корень степени  $n$ . Обратные тригонометрические функции. Решение уравнений вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = b$ ,  $\operatorname{tg} x = c$ .

12. Предел функции в точке. Непрерывность (6 часов).

Определение предела функции в точке. Предел  $\frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ . Теорема о сохранении знака и следствия из нее: единственность предела, предельные переходы в неравенствах, ограниченность функции, имеющей предел. Арифметические свойства предела. Понятие о бесконечно малых.

Непрерывность функции в точке. Непрерывность многочленов, рациональных дробей, тригонометрических функций, суперпозиции функций. Пределный переход по последовательности значений аргумента.

Свойства функций непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего, наименьшего и промежуточных значений. Непрерывность обратной функ-

ции.

13. Производная и ее применения (2 часа).

Определение производной, ее геометрический и физический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, произведения, частного, суперпозиции, обратной функции. Применение производной в приближенных вычислениях, уравнение касательной к графику функции.

### III семестр

14. Производная и ее применения. Продолжение (4 часа).

Понятие локального экстремума. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора. Промежутки возрастания и убывания дифференцируемой функции. Выпуклость функции. Условия выпуклости дифференцируемой функции.

Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ , бесконечные пределы, асимптоты графика функции. Схема исследования функции, построения ее графика.

15. Степенная, показательная и логарифмическая функции (4 часа).

Степень с натуральным, целым, рациональным показателем. Определение степени с иррациональным показателем, корректность определения.

Показательная функция, ее свойства. Логарифмическая функция. Свойства логарифмов.

Определение функции  $e^x$ . Вычисление производной функции. Производные функций  $a^x$ ,  $\ln x$ ,  $x^\alpha$ .

16. Площадь фигуры (6 часов).

Понятие площади плоской фигуры. Основные свойства площади. Вычисление площади прямоугольника, многоугольника. Условие существования площади.

Понятие криволинейной трапеции. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке. Существование площади трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции. Площадь криволинейной трапеции с переменной границей.

17. Неопределенный интеграл (3 часа).

Понятие первообразной, неопределенного интеграла. Первообразные элементарных функций. Основные приемы интегрирования.

18. Определенный интеграл (5 часов).

Существование первообразной для функции, непрерывной на отрезке. Понятие определенного интеграла. Приемы его вычисления. Формула замены переменной в определенном интеграле. Теорема о среднем.

Приближенное вычисление интегралов. Основные принципы применения интегралов в геометрии и физике.

19. Объем тела (6 часов).

Понятие объема тела. Основные свойства объема. Достаточное условие существования объема тела. Вычисление объема параллелепипеда, призмы, пирамиды.

Тела вращения: цилиндр, конус, шар, тор. Вычисление объема тел вращения и их частей. Понятие площади поверхности, ее вычисление.

## IV семестр

20. Комплексные числа (6 часов).

История возникновения понятия комплексного числа. Определение комплексных чисел и операций над ними, свойства операций. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня степени  $n$  из комплексного числа. Корни из единицы, первообразные корни. Некоторые применения комплексных чисел в комбинаторике, геометрии, анализе.

Предел последовательности комплексных чисел. Достаточное условие существования предела для последовательности чисел, записанных в тригонометрической форме. Определение  $e^z$  для комплексных значений  $z$ . Формула Эйлера и логарифм комплексного числа.

21. Многочлены (10 часов).

Определение многочленов, операции над ними. Деление с остатком. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Корни алгебраического уравнения и теорема Безу. Схема Горнера.

Основная теорема алгебры (схема доказательства). Разложение многочлена на линейные множители. Теорема Виета. Кратные корни и их отделение. Разложение на множители многочлена с действительными коэффициентами. Некоторые специальные приемы нахождения корней алгебраических уравнений высоких степеней. Общий метод интегрирования рациональных дробей.

Интерполяционная формула Лагранжа, ее применения в геометрии.

Алгебраические и трансцендентные числа. Теорема Лиувилля. Примеры трансцендентных чисел.

22. Элементы аналитической геометрии (16 часов).

Декарт – основоположник аналитической геометрии. Задача Паппа. Общие принципы применения алгебры в геометрии.

Линейная независимость векторов. Понятие базиса. Разложение вектора по базису.

Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение в произвольном базисе. Вычисление углов и расстояний между прямыми.

Декартова система координат и ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Уравнение плоскости и его геометрический смысл. Расстояние от точки до плоскости и прямой. Переход от одного способа задания прямой к другому. Вычисление угла между прямой и плоскостью. Примеры решения задач.

Векторное и смешанное произведение векторов. Применения в стереометрии.

Трехгранный угол и его свойства. Расчет трехгранных углов: теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла.

Резерв. Элементы абстрактной алгебры и классификация движений на плоскости и в пространстве.

Симметрия в математике. Примеры. Симметрии правильного треугольника, композиция симметрий, ее свойства.

Абстрактное определение группы. Примеры. Порождающее множество. Понятия порядка группы и порядка ее элемента. Группа симметрий тетраэдра.

Группы движений плоскости и пространства. Классификация движений.

## Практические занятия

### I семестр

#### 1. Метод математической индукции (8 часов).

Доказательства различных формул для сумм; задачи на делимость; неравенства, в том числе неравенство Бернулли. Задачи на применение других схем метода: по всем или нескольким предыдущим утверждениям, по нескольким параметрам, ветвящаяся индукция.

#### 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей (14 часов).

Перевод на язык комбинаторики и решение задач, которые сводятся к подсчету числа размещений, перестановок, сочетаний, в том числе и вероятностных задач.

Обсуждение понятия вероятности события. Задачи на сложение и умножение вероятностей.

Изучение свойств коэффициентов бинома Ньютона. Определение коэффициентов в разложении различных выражений по степеням параметров.

#### 3. Элементы логики и теории множеств (6 часов).

Обсуждение элементарных логических понятий: высказывание, логические связки,

необходимо и достаточно, равносильно, прямое и обратное утверждение и т.п.; понятие множества и операций над ним. Примеры.

Таблицы истинности. Доказательство различных тождеств и включений.

Различные примеры бинарных отношений: функции, отношения эквивалентности и порядка.

#### 4. Уравнения и неравенства (10 часов).

Уравнения, неравенства. Область допустимых значений, множество решений. Системы уравнений и неравенств.

#### 5. Геометрия.

Планиметрия (10 часов).

Равенство и подобие фигур: связь этих понятий с движением и преобразованием подобия. Задачи, использующие подобие, в том числе и конкурсного характера.

Стереометрия (20 часов).

Аксиомы стереометрии (Погорелов и лекционный материал) и простейшие следствия из них. Параллельность прямых и плоскостей. Задачи на доказательство.

Изображение пространственных фигур на плоскости. Построение сечений различных многогранников, вычисление элементов сечений.

#### 6. Основы теории чисел (12 часов).

Краткое обсуждение лекционного материала по темам: натуральные числа и схема построения множества целых чисел.

Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Теорема о представлении наибольшего общего делителя двух целых чисел в виде их линейной комбинации. Решение диофантовых уравнений первой степени.

Задачи на делимость и простоту. Применение основной теоремы арифметики и малой теоремы Ферма.

Сравнения. Решение сравнений первой степени с одним неизвестным. Перевод на язык сравнений и решение задач, связанных с делимостью.

## II семестр

#### 7. Стереометрия (30 часов).

Перпендикулярность прямых и плоскостей. Задачи на построение и доказательство. Задачи конкурсного характера.

Углы между прямыми и плоскостями в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Площадь ортогональной проекции многоугольника. Решение задач по этим темам.

8. Рациональные и действительные числа (6 часов).

Обсуждение лекционного материала: схемы построения, анализ определений отношения порядка, операций.

Доказательство иррациональности некоторых выражений. Перевод обыкновенной дроби в периодическую и обратно.

9. Предел числовой последовательности (12 часов).

Свойства последовательностей. Анализ определения предела. Арифметические свойства предела. Бесконечная геометрическая прогрессия и обращение периодической дроби в обыкновенную. Различные приемы вычисления пределов.

10. Планиметрия (8 часов).

Окружность. Вписанный угол. Его свойства. Свойства хорд, секущих и касательных. Решение конкурсных задач на эти темы.

11. Тригонометрия (18 часов).

Определение тригонометрических функций и их свойства. Основные тождества тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений.

Область обратимости функции и обратная функция. Свойства квадратного корня и обратных тригонометрических функций. Решение элементарных тригонометрических уравнений и неравенств. Конкурсные задачи.

Применение тригонометрии при решении планиметрических задач. Теоремы синусов и косинусов. Конкурсные задачи.

12. Предел функции и непрерывность (12 часов).

Краткое обсуждение лекционного материала: анализ двух определений предела. Вычисление элементарных пределов по определениям. Основные свойства предела функции. Различные приемы вычислений пределов.

Непрерывность функции в точке и на интервале. Доказательство непрерывности различных функций. Примеры функций с разрывами. Асимптоты функций. Применение теорем о свойствах непрерывных функций при решении задач.

13. Производная и ее применение (10 часов).

Анализ определения производной. Вычисление производных простейших функций по определению. Правила и приемы вычисления производной. Уравнение касательной к графику функции.

Резерв.

Геометрические задачи на построение и ГМТ.

### III семестр

14. Производная и ее применения. Продолжение (18 часов).

Возрастание и убывание функции, экстремумы. Задачи, связанные с поиском экстремума. Выпуклость функции.

Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ , бесконечные пределы, асимптоты графика функции. Исследование функции, построение ее графика.

15. Степенная, показательная и логарифмическая функции (18 часов).

Свойства и графики степенной, показательной и логарифмической функций. Вычисление пределов, производных и исследование функций, связанных с ними.

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Уравнения и неравенства с параметрами.

16. Площадь фигуры (10 часов).

Обсуждения понятия площади плоской фигуры. Основные свойства площади.

Решение планиметрических задач, в том числе и конкурсного характера.

17. Неопределенный интеграл (8 часов).

Обсуждение понятия первообразной и неопределенного интеграла. Первообразные элементарных функций. Основные приемы интегрирования.

18. Определенный интеграл (8 часов).

Понятие определенного интеграла. Приемы его вычисления. Применение формулы замены переменной в определенном интеграле и теоремы о среднем.

Приближенное вычисление интегралов.

19. Объем тела и тела вращения (22 часа).

Понятие объема тела. Основные свойства объема, формулы для вычисления объема параллелепипеда, призмы, пирамиды.

Тела вращения: цилиндр, конус, шар, тор. Вычисление объема тел вращения и их частей. Понятие площади поверхности, ее вычисление.

Решение стереометрических задач, в том числе и конкурсного характера.

## IV семестр

Повторение (6 часов).

Стереометрические задачи с шарами.

20. Комплексные числа (10 часов).

Определение комплексных чисел и операций над ними, свойства операций. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня степени  $n$  из

комплексного числа. Корни из единицы, первообразные корни. Некоторые применения комплексных чисел в комбинаторике, геометрии, анализе. Определение  $e^z$  для комплексных значений  $z$ . Формула Эйлера и логарифм комплексного числа.

Повторение (6 часов).

Системы уравнений и неравенств, в том числе с параметрами.

21. Многочлены (18 часов).

Определение многочленов, операции над ними. Деление с остатком. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Корни алгебраического уравнения и теорема Безу. Схема Горнера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители. Теорема Виета. Кратные корни и их отделение. Разложение на множители многочлена с действительными коэффициентами. Некоторые специальные приемы нахождения корней алгебраических уравнений высоких степеней. Общий метод интегрирования рациональных дробей. Интерполяционная формула Лагранжа, ее применения в геометрии. Алгебраические и трансцендентные числа. Примеры трансцендентных чисел.

Повторение (12 часов).

Тригонометрия. Планиметрия.

22. Элементы аналитической геометрии (30 часов).

Общие принципы применения алгебры в геометрии. Аналитика на плоскости (6-8 часов).

Линейная независимость векторов. Понятие базиса. Разложение вектора по базису. Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение в произвольном базисе. Вычисление углов и расстояний между прямыми.

Декартова система координат и ортонормированный базис. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Уравнение плоскости и его геометрический смысл. Расстояние от точки до плоскости и прямой. Переход от одного способа задания прямой к другому. Вычисление угла между прямой и плоскостью. Примеры решения задач.

Векторное и смешанное произведение векторов. Применения в стереометрии.

Трехгранный угол и его свойства. Расчет трехгранных углов: теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла.

Повторение (14 часов).

Элементы математического анализа.

Показательная и логарифмическая функции. Уравнения и неравенства.

Общее повторение школьного курса математики.