

Вопросы к экзамену

Лектор: проф. Васильев А.В.

2 семестр, 2019-20 учебный год

1. Подгруппа, порожденная множеством: эквивалентность двух определений. Циклическая группа. Теорема о строении циклических групп.
2. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы, теорема Лагранжа и следствия из нее.
3. Нормальная подгруппа: эквивалентность нескольких определений. Фактор-группа по нормальной подгруппе.
4. Гомоморфизм групп. Первая теорема о гомоморфизмах.
5. Прямое произведение групп. Связь между двумя определениями. Примеры.
6. Прямое произведение групп. Теорема о разложении конечной циклической группы в прямое произведение примарных подгрупп.
7. Действие группы на множестве. Стабилизатор и орбита, связь между их порядками.
8. Действие группы на множестве. Теорема Бернсайда о количестве орбит и ее применение к задаче о раскраске тетраэдра.
9. Полупрямое произведение групп. Связь между двумя определениями. Примеры.
10. Подпространство, инвариантное относительно линейного преобразования. Сужение линейного преобразования на инвариантное подпространство. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, согласованной с инвариантным подпространством.
11. Собственные векторы и собственные числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Связь между собственными числами и характеристическими корнями линейного преобразования.
12. Корневое подпространство, высота корневого подпространства. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
13. Нильпотентное линейное преобразование. Ниль-слой, жорданов набор, жорданов базис для нильпотентного линейного преобразования. Теорема о существовании жорданова базиса для нильпотентного линейного преобразования и ее матричная форма.
14. Жорданов базис линейного преобразования. Теорема Жордана о существовании жорданова базиса линейного преобразования. Матричная форма теоремы Жордана.
15. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Связь между значениями многочлена от подобных матриц. Теорема о вычислении значения многочлена матрицы через значение многочлена ее жордановой формы.
16. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Теорема о минимальном аннулирующем многочлене и теорема Гамильтона – Кэли.
17. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Теорема о ядерном разложении пространства относительно многочлена, аннулирующего линейное преобразование.
18. Значение функции от матрицы. Теорема о существовании многочлена, значение которого совпадает со значением функции от матрицы. Значение функции от линейного преобразования.
19. Линейные функции, сопряженное пространство, теорема о каноническом изоморфизме пространств V и V^{**} и ее следствия. Теорема о существовании отображения,

сопряженного данному.

20. Билинейная функция и билинейная форма. Матрица билинейной функции и ее изменение при невырожденной замене. Ядро билинейной функции, ее ранг, связь между размерностью ядра и рангом. Типы билинейных функций.

21. Симметрическая билинейная функция и квадратичная функция, с ней ассоциированная. Ортогональные векторы, ортогональное дополнение и ортогональный базис. Теорема о существовании ортогонального базиса. Метод Лагранжа его поиска.

22. Симметрическая билинейная функция. Нахождение ортогонального базиса у симметрической билинейной функции, все угловые миноры матрицы которой отличны от нуля, с помощью процесса ортогонализации Грама – Шмидта.

23. Нормальный вид вещественной квадратичной функции, положительная определенность, индексы инерции и их определение методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определенности.

24. Кососимметрическая билинейная функция. Теорема о существовании симплектического базиса, его практическое отыскание методом Лагранжа.

25. Полуторалинейная функция. Эрмитовы и косоэрмитовы полуторалинейные функции. Эрмитова квадратичная функция и ее нормальный вид, положительно определенные эрмитовы квадратичные функции.

26. Векторные пространства, снабженные скалярным произведением: евклидово и унитарное пространства. Арифметическое пространство со стандартным скалярным произведением. Матрица Грама и теорема о значении ее определителя, неравенство Коши – Буняковского.

27. Евклидово и унитарное пространства. Ортогональный и ортонормированный наборы векторов, теорема о существовании ортонормированного базиса, изоморфизм пространств одинаковой размерности.

28. Евклидово и унитарное пространства. Ортогональные наборы векторов, ортогональное дополнение подпространства и его свойства. Теорема об ортогональном дополнении.

29. Евклидово и унитарное пространства. Расстояния и углы. Пространство со скалярным произведением как нормированное и метрическое пространство.

30. Канонический изоморфизм между евклидовым (унитарным) пространством и пространством, сопряженным к нему. Сопряженное линейное преобразование, его матрица и их свойства.

31. Нормальные преобразования и матрицы. Свойство собственных векторов нормальных преобразований. Теорема о каноническом виде матрицы нормального преобразования в унитарном пространстве.

32. Нормальные преобразования и матрицы. Теорема о каноническом виде нормального преобразования в евклидовом пространстве.

33. Ортогональные и унитарные преобразования: эквивалентность нескольких определений.

34. Ортогональные и унитарные преобразования. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального и унитарного преобразования, ее следствие для евклидовых пространств малых размерностей.

35. Самосопряженные преобразования. Симметрические и эрмитовы матрицы. Теорема о самосопряженном преобразовании.

36. Неотрицательные самосопряженные преобразования. Теорема о существовании

и единственности неотрицательного квадратного корня из неотрицательного преобразования.

37. Приведение квадратичной функции к главным осям. Одновременная диагонализации пары квадратичных функций.

38. Изометричные линейные преобразования. Теорема о существовании неотрицательного преобразования, изометричного данному линейному преобразованию. Сингулярные числа. Свойство сингулярных чисел нормального преобразования.

39. Теоремы о полярном и сингулярном разложении линейного преобразования евклидова или унитарного пространства.

40. Определения аффинного пространства и аффинного отображения. Дифференциал аффинного отображения и критерий биективности аффинного отображения, изоморфизм аффинных пространств одной размерности.

41. Полная аффинная группа, ее строение и основные свойства.

42. Евклидово аффинное пространство. Теорема об эквивалентных определениях движения.

43. Полная группа движений, ее структура и основные свойства.

44. Плоскость, характеризующая заданное движение, и классификация движений пространств небольшой размерности.

45. Определения проективного пространства и проективного преобразования. Полная проективная группа, как фактор-группа полной линейной группы, ее основные свойства.