Вопросы к экзамену

Лектор: проф. Васильев А.В.

3 семестр, 2020-21 учебный год

1. Группа, свободная в некотором классе. Свободные абелевы группы. Теорема о свободе подгруппы свободной абелевой группы.

2. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп.

3. Гомоморфизм колец и алгебр, теорема о гомоморфизмах, прямая сумма колец и алгебр.

4. Идеал, порожденный множеством. Главный идеал. Кольцо главных идеалов, примеры.

5. Свойства кольца главных идеалов.

6. Модуль над кольцом. Примеры. Подмодули, фактор-модули, теорема о гомоморфизмах для модулей.

7. Модуль, порожденный множеством. Аннулятор. Теорема о строении циклических модулей. Свободный циклический модуль.

8. Свободные конечно порожденные модули над кольцами главных идеалов, их базисы и подмодули.

9. Теорема о строении конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов.

10. Инвариантные множители модуля. Аннулятор периодического модуля, следствие для абелевых групп. Конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.

11. Теорема Жордана как следствие теоремы о конечно порожденных модулях. Минимальный многочлен как последний инвариантный множитель.

12. Эквивалентные определения нётерова кольца. Нётеровость фактор-кольца нётерова кольца.

13. Подмодуль конечно порождённого модуля над нётеровым кольцом. Теорема Гильберта о базисе и ее следствие для кольца многочленов от n переменных.

14. Нильпотентный элемент и нильпотентный радикал кольца. Простой идеал. Теорема о нильпотентном радикале нётерова кольца.

15. Расширение кольца над кольцом, алгебраические элементы расширения, конечно порожденное расширение. Следствие теоремы Гильберта о базисе для расширений нётерова кольца.

16. Теорема Гильберта о нулях в алгебраической форме (свойство ненильпотентного элемента конечно порожденной алгебры над алгебраически замкнутым полем).

17. Системы алгебраических уравнений и (аффинные) алгебраические многообразия. Идеал системы, эквивалентность систем. Теорема Гильберта о базисе в геометрической форме (эквивалентность системы ее конечной подсистеме).

18. Идеал алгебраического многообразия. Эквивалентность систем и равенство идеалов многообразий этих систем. Радикал идеала и его свойства, радикальный идеал.

19. Теорема Гильберта о нулях в геометрической форме (равенство идеала многообразия системы и радикала идеала системы) и ее следствия.

20. Задача вхождения (многочлена в идеал кольца многочленов), операция редукции и эквивалентные определения базиса Грёбнера–Ширшова. Теорема о существовании базиса Грёбнера идеала кольца многочленов.

21. Поиск базиса Грёбнера: теория. Зацепление многочленов, разрешимое зацепление, редуцирование зацеплений и (без док-ва) Diamond Lemma.

22. Поиск базиса Грёбнера: Diamond Lemma.

23. Поиск базиса Грёбнера: алгоритм Бухбергера. Редуцированный базис Грёбнера.

24. Базис Грёбнера: приложения к решению алгебраических уравнений. Совместность, конечность числа решений, эквивалентность систем.

25. Разложение на простые множители в нётеровом целостном кольце. Достаточное условие единственности такого разложения.

26. Факториальное кольцо и его свойства. Нормальность (целозамкнутость) факториального кольца. Пример нефакториального кольца.

27. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.

28. Свободная группа (в классе всех групп), определение и конструкция.

29. Базис и ранг свободной группы, вложение свободной группы произвольного счётного ранга в свободную группу ранга 2, линейность свободных групп счётного ранга.

30. Переписывающий процесс Рейдемейстера–Шрайера: теорема о порождающем множестве для подгруппы через порождающее множество группы и систему представителей смежных классов по этой подгруппе, конечно порожденность подгруппы конечного индекса в конечно порожденной группе.

31. Шрайерова трансверсаль и теорема о свободе подгруппы свободной группы, следствие о ранге подгруппы.

32. Нормальное замыкание множества элементов группы. Определяющие соотношения и представление (генетический код) группы, примеры. Подгруппа конечного индекса конечно представленной группы конечно представлена.

33. Свойства коммутаторов, определения коммутанта и взаимного коммутанта, их свойства. Поведение коммутанта при гомоморфизме и критерий коммутативности фактор-группы.

34. Теоремы о коммутантах симметрической и знакопеременной групп, общей линейной и специальной линейной групп.

35. Ряд коммутантов, теорема об эквивалентных определениях разрешимой группы и следствие из нее.

36. Центр группы, верхний центральный ряд, определение нильпотентной группы, ее разрешимость. Нетривиальность центра и нильпотентность конечной p-группы.

37. Нормальный, субнормальный и композиционный ряды группы. Теорема об уплотнении (суб)нормального ряда. Теоремы Шрайера и Жордана–Гёльдера.

38. Теоремы Силова: существование. Примеры силовских подгрупп в конечных группах.

39. Теоремы Силова: вложение, сопряженность силовских подгрупп, их количество.

40. Теоремы Силова (без док-ва). Строение групп порядка pq.

41. Подобие (подстановочный изоморфизм) групп подстановок, теорема о подобии транзитивной группы группе правых сдвигов смежных классов по стабилизатору точки. Вложение группы подстановок в прямое произведение своих транзитивных составляющих.

42. Определение блока и системы блоков для транзитивной группы, примитивность и импримитивность. Соответствие между системами импримитивности и надгруппами стабилизатора точки. Орбиты нормальной подгруппы, как система импримитивности.

43. Кратно транзитивные группы: определение, примитивность 2-транзитивной группы, 2-транзитивность группы $\mathrm{PSL}_n(F)$.

44. Определение подстановочного и регулярного сплетения двух групп. Теорема Калужнина–Краснера о вложении Фробениуса.

45. Вложение импримитивной группы в подстановочное сплетение.

46. Теорема Галуа о простоте группы A_n при $n \neq 4$.

47. Лемма Ивасавы и теорема Жордана–Диксона о простоте группы $\mathrm{PSL}_n(F)$.

48. Простота группы SO_3.

49. Расширения полей. Поле, порожденное множеством элементов над своим подполем. Конечное расширение и его степень. Алгебраический и трансцендентный элементы расширения. Простое расширение: алгебраическое и трансцендентное. Фактор-кольцо по неразложимому многочлену как простое конечное алгебраическое расширение, его степень.

50. Расширения полей. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Конечность простого алгебраического расширения и алгебраичность конечного расширения. Теорема о степени башни расширений. Конечность расширения, порождённого конечным числом алгебраических элементов. Алгебраическое замыкание поля в его расширении.

51. Гомоморфизмы и изоморфизмы над полем. Критерий эквивалентности (изоморфизма над K) двух расширений поля K. Лемма о продолжении гомоморфизма.

52. Поле разложения многочлена, теорема о его существовании и единственности.

53. Целые (алгебраические) расширения колец. Конечность расширения кольца как конечно порожденность соответствующего модуля. Критерий целозамкнутости элемента расширения. Целое замыкание нётерова кольца в своем расширении.

54. Конечно порожденные алгебры. Базис трансцендентности конечно порожденной алгебры без делителй нуля.

55. Конечно порожденные алгебры. Лемма Нётер о нормализации (над бесконечным полем) и ее следствия.

56. Эндоморфизм Фробениуса. Теорема о конечных полях (полях Галуа). Алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$.

57. Сепарабельные многочлены и совершенные поля. Пример несовершенного поля и несепарабельного многочлена.

58. Сепарабельный элемент и сепарабельное расширение. Теорема о примитивном элементе. Группа автоморфизмов расширения. Порядок группы автоморфизмов конечного сепарабельного расширения.

59. Определение расширения Галуа, его группа Галуа. Нормальное расширение. Конечное сепарабельное и нормальное расширение является расширением Галуа. Группа Галуа уравнения (многочлена), ее действие на множестве корней. Примеры.

60. Соответствие Галуа. Основная теорема теории Галуа. Критерий Галуа разрешимости уравнения в радикалах (без док-ва).

61. Разрешимость уравнения в квадратичных радикалах. Задачи о построении с помощи циркуля и линейки. Второе доказательство основной теоремы алгебры.

62. Критерий Галуа разрешимости уравнения в радикалах (без док-ва). Неразрешимость общего уравнения степени выше 4 в радикалах.