Вопросы к экзамену

Лектор: проф. Васильев А.В.

4 семестр, 2020-21 учебный год

1. Понятие полилинейного отображения векторных пространств. Тензорное произведение векторных пространств: определение, существование и единственность.

2. Тензорное произведение векторных пространств: определение, основной принцип тензорной алгебры, тензорное произведение линейных операторов.

3. Пространство тензоров: валентность, ковариантные и контравариантные тензоры. Операции на тензорах: тензорное произведение и свертка.

4. Координаты тензора: замена координат при переходе к новому базису, координаты тензорного произведения и свертки, метрический тензор, спуск и подъем индекса.

5. Тензорная алгебра: определение и универсальное свойство, тензорная алгебра как алгебра многочленов от некоммутирующих переменных. Тензор структурных констант конечномерной алгебры.

6. Симметрические и кососимметрические полилинейные отображения. Симметрическая и внешняя степень векторного пространства и их универсальность.

7. Симметрическая алгебра и внешняя алгебра (алгебра Грассмана) и их свойства. Симметрическая и внешняя степень линейного оператора.

8. Симметрические и кососимметрические тензоры, операции симметрирования и альтернирования.

9. Теорема о соответствии между p-мерными подпространствами пространства и разложимыми p-векторами его алгебры Грассмана.

10. Понятие линейного представления: представление группы, кольца, алгебры; морфизмы и эквивалентность представлений; примеры.

11. Инвариантные представления: подпредставление и факторпредставление, приводимость и разложимость представлений, сумма представлений; примеры.

12. Неприводимые представления, лемма Шура и ее следствия: пропорциональность неприводимых представлений и одномерность неприводимого представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем.

13. Полная приводимость линейных представлений: эквивалентные определения, лемма о неподвижной точке и теорема Машке для конечных групп.

14. Полная приводимость линейных представлений: эквивалентные определения, вполне приводимые представления с простым спектром.

15. Изотипные компоненты представления, лемма Бернсайда.

16. Конечномерные ассоциативные алгебры: свойство нильпотентной алгебры и существование нильпотентного радикала.

17. Определение полупростой алгебры, критерий полупростоты, разложение полупростой алгебры в прямую сумму простых, идеалы полупростой алгебры.

18. Строение простой алгебры над алгебраически замкнутым полем и ее нетривиальное неприводимое представление. Строение полупростой алгебры над алгебраически замкнутым полем и ее нетривиальные неприводимые представления.

19. Групповые алгебры и линейные представления конечных групп: полупростота групповой алгебры над полем, характеристика которого не делит порядок группы, теорема о числе и размерностях неприводимых представлений.

20. Неприводимые представления циклической группы, одномерные представления конечной группы и их количество.

21. Неприводимые представления симметрических групп S_3 и S_4.

22. Определение комплексного (обыкновенного) характера и его элементарные свойства.

23. Пространство комплексных функций $\mathbb{C}[G]$ на группе G и скалярное произведение на нем. Подпространство центральных функций $Z\mathbb{C}[G]$, неприводимые характеры как ортонормированный базис пространства центральных функций, следствия.

24. Эрмитово скалярное произведение на пространствах $\mathbb{C}[G]$ и $Z\mathbb{C}[G]$, первое соотношение ортогональности для характеров.

25. Понятие сопряженного представления, свойства его характера, второе соотношение ортогональности для характеров.

26. Таблица характеров и ее свойства. Таблицы характеров циклической группы и группы S_3.

27. Произведение (тензорное) представлений группы G и его характер.

28. Определение тела и алгебры с делением. Центр тела и центральная алгебра. Алгебра кватернионов как алгебра с делением.

29. Простота и полупростота алгебры с делением при расширении поля. Существование расширения поля, над которым алгебра с делением изоморфна полной матричной алгебре. Степень свободы алгебры с делением.

30. Теорема о продолжении изоморфизма максимальных подполей алгебры с делением до автоморфизма самой алгебры.

31. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна, как следствия теоремы о продолжение изоморфизма.

32. Понятие топологической группы, компактные топологические группы, полная приводимость вещественных и комплексных представлений компактной группы.

33. Линейные группы Ли: определение и примеры. Касательное подпространство, размерность группы и ее касательного подпространства.