

## Вопросы к экзамену (лектор: проф. Васильев А.В.)

### 1 семестр, 2019-20 учебный год

1. Алгебраическая операция, алгебраическая система, сужение операции на подмножество, подсистема, изоморфизм.
2. Группа: аксиомы, примеры, элементарные свойства. Симметрическая группа подстановок: проверка аксиом группы. Подгруппа. Знакопеременная группа подстановок как подгруппа симметрической группы.
3. Кольцо и поле: аксиомы, примеры, элементарные свойства.
4. Отношение эквивалентности. Факторизация. Кольцо вычетов.
5. Кольцо и поле: аксиомы, характеристика поля, простые поля.
6. Векторное пространство над полем: аксиомы, примеры, понятие подпространства, фактор-пространства.
7. Алгебра над полем: аксиомы, примеры, понятие подалгебры.
8. Группа подстановок: разложение подстановки в произведение циклов, декремент, четность.
9. Разложение подстановки в произведение транспозиций, изменение знака подстановки при умножении на транспозицию, четность произведения подстановок.
10. Пространство прямоугольных матриц и алгебра квадратных матриц: проверка аксиом.
11. Разложение матрицы в произведение элементарных и диагональной матриц.
12. Определитель квадратной матрицы, его поведение при простейших преобразованиях.
13. Определитель произведения матриц.
14. Разложение определителя по строке (столбцу).
15. Обратная матрица: существование, вычисление, решение линейных матричных уравнений. Формулы Крамера для решения определенной системы.
16. Поле комплексных чисел: существование, единственность. Сопряжение комплексных чисел и его свойства. Определение алгебры кватернионов.
17. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корня  $n$ -ой степени из комплексного числа.
18. Системы линейных уравнений: векторная и матричная формы, ступенчатая матрица и метод Гаусса поиска общего решения системы, однородная система и ее основное свойство.
19. Наборы векторов: линейная комбинация набора, линейная зависимость, эквивалентность наборов, основная лемма о линейной зависимости.
20. Базис векторного пространства, теорема о базисе конечномерного векторного пространства, размерность векторного пространства.
21. Базис пространства, размерность, координаты, изоморфизм пространств.
22. Матрица перехода от базы к базе, ее невырожденность, связь между координатами в разных базах.
23. Ранг системы векторов и строчный ранг матрицы: совместность и определенность системы линейных уравнений в терминах ранга, теорема Кронекера—Капелли.
24. Подпространство. Базис, согласованный с подпространством. Сумма и пересечение подпространств, теорема о взаимном расположении двух подпространств, следствие о размерности суммы подпространств.

25. Теорема об эквивалентных определениях прямой суммы подпространств. Фактор-пространство и его базис.

26. Линейные отображения и преобразования: примеры, в том числе определение линейной функции.

27. Матрица линейного отображения и изоморфизм пространства линейных отображений и пространства прямоугольных матриц.

28. Лемма об умножении матриц линейных отображений и изоморфизм алгебры линейных преобразований и алгебры квадратных матриц.

29. Ядро и образ линейного отображения, инъективные линейные отображения и невырожденные линейные преобразования, сумма размерностей ядра и образа.

30. Однородные системы линейных уравнений: пространство решений, фундаментальный набор решений, связь между однородными и неоднородными системами.

31. Теорема о совпадении строчного и столбцевого ранга, ранг суммы и произведения матриц.

32. Минорный ранг и совпадение трех определений ранга матрицы.

33. Многочлены от одной переменной: определение, кольцо многочленов над кольцом и алгебра над полем, степень суммы и произведения многочленов.

34. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов. Элементарные свойства делимости многочленов.

35. Целостные и евклидова кольца, делитель, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида.

36. Теорема о разложении на простые множители, ее следствие для многочленов.

37. Критерий взаимной простоты и свойства взаимно простых элементов евклидова кольца.

38. Значения и корни многочленов: теорема Безу, теорема о числе корней, интерполяционный многочлен Лагранжа.

39. Кратные корни, производная и ее приложения к многочленам над полем характеристики 0, формула Тейлора и ее следствия.

40. Теорема об интерполяционном многочлене Лагранжа — Сильвестра.

41. Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, элементарные свойства, лексикографическое упорядочение одночленов, старшая степень.

42. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах.

43. Идеал коммутативного кольца и фактор-кольцо. Фактор-кольцо по максимальному идеалу и поле вычетов.

44. Фактор-кольцо евклидова кольца по идеалу, порожденному простым элементом, и теорема о существовании корня многочлена в расширении поля, ее следствия: разложение на линейные множители в расширении поля, формулы Виета.

45. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел.

46. Оценка числа действительных корней: границы корней, ряд Штурма и теорема Штурма.

47. Поле частных и поле рациональных дробей, основная теорема о рациональных дробях.

48. Разложимость многочлена над полем рациональных чисел: сведение к многочленам с целочисленными коэффициентами, признак неразложимости над кольцом целых чисел и существование неразложимого многочлена произвольной степени.

49. Алгоритмическая разрешимость проблемы разложения многочлена над полем рациональных чисел.