1. Доказать, что

   а) $S_n = \langle (ij) \mid 1 \le i < j \le n \rangle$;
   б) $S_n = \langle (1i) \mid 2 \le i \le n \rangle$;
   в) $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$;
   г) $A_n = \langle (ijk) \mid 1 \le i < j < k \le n \rangle$;
   д) $A_n = \langle (1ij) \mid 2 \le i < j \le n \rangle$;
   е) $A_n = \langle (12i) \mid 3 \le i \le n \rangle$.

2. Пусть H — подгруппа группы G. Определим, правый смежный класс Hg группы G по подгруппе H с представителем g как множество $\{hg \mid h \in H\}$. Аналогичным образом определим левый смежный класс $gH = \{gh \mid h \in H\}$. Доказать, что
   а)$g_1 \in Hg$ в том и только в том случае, если $Hg_1 = H_g$. Сделать из этого вывод, что смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают;
   б) для любого $g \in G$ справедливо равенство $|H| = |Hg|$;
   в) если через $|G : H|$ обозначить мощность множества правых смежных классов G/H (число $|G : H|$ называется индексом подгруппы H в группе G), то $|G| = |G : H| \cdot |H|$ (теорема Лагранжа);
   г) существует биекция между множеством правых смежных классов G/H и множеством левых смежных классов $H\backslash G$.

3. Элемент порядка 2 группы G называется инволюцией. Доказать, что если $|G|$ делится на 2, то в группе G есть инволюция.

4. Доказать, что в группе A_4 нет подгруппы порядка 6.

5. Пусть конечная группа G содержит неединичные элементы x и y такие, что $x^{-1}yx = y^{-1}$. Показать, что порядок группы G четен.

6. Известная игра «15» представляет собой пятнадцать плоских квадратных фишек одинакового размера, пронумерованных числами от 1 до 15. Фишки расположены на квадратной доске, разделенной на 16 полей того же размера, что и фишки. Остается свободным одно поле. За один ход можно, не снимая с доски, передвинуть на это поле соседнюю ним (по горизонтали или по вертикали) фишку. В «правильном» расположении фишки размещены следующим образом:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Фишки убрали с доски, а затем расположили в произвольном порядке так, что нижнее правое/ поле осталось свободным:

i_1	i_2	i_3	i_4
i_5	i_6	i_7	i_8
i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}
i_{13}	i_{14}	i_{15}	

Показать, что от такого расположения можно перейти к «правильному» тогда и только тогда, когда подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 15 \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{15} \end{pmatrix}$$

является четной.