1. Let G be a nonempty set and let $\cdot$ be an algebraic binary operation on G, i. e., for every $a, b \in G$ the element $a \cdot b$ is in G. Assume also that the following satements are satisfied in G:

   (a) for every $a, b, c \in G$ the equality $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ holds (this property is called the *associative law*);

   (b) there exists $e \in g$ such that, for every $a \in G$, the identity $a \cdot e = a = e \cdot a$ holds;

   (c) for every $a \in G$, there exists $b \in G$ such that $a \cdot b = e = b \cdot a$.

   Then G is called a *group*. Usually, we will write ab instead of $a \cdot b$ and call the group operation the multiplication. We also use symbol 1 instead of e in statement (b) and a^{-1} instead of b in statement (c)

   Given $a \in G$ prove that the maps $\rho_a : G \to G$ and $\lambda_a : G \to G$ defined by $\rho_a : g \mapsto ga$ and $\lambda_a : g \mapsto ag$ are bijections.

   Prove that statements (b) and (c) are equivalent to the statement

   - for every $a, b \in G$, both equations $a \cdot x = b$ and $y \cdot a = b$ have a unique solution.

2. Given $x_1, \dots, x_n \in G$, where G is a group, prove that $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ does not depend on the order of parentheses.

3. A group G is said to be *finite* if G is a finite set. For a finite group G, prove that for every $x \in G$ there exists a positive integer n such that $x^n = xx \dots x = e$ (the minimal n with this property is called the *order* of x and denoted by $o(x)$ or $|x|$).

4. A subset H of G is called a *subgroup* if

   - H is closed under multiplication, i. e., $h_1 h_2 \in H$ for every $h_1, h_2 \in H$;
   - H is a group, using the multiplication in G.

   Prove that in a finite group G a subset H of G is a subgroup if and only if H is closed under multiplication.

5. Let G, H be groups. A map $\varphi : G \to H$ is called a *homomorphism*, if φ preserves the operation, i. e., for every $x, y \in G$ the equality $(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$ holds. A bijective homomorphism is called an *isomorphism*. Prove that the map $\varphi : G \to G$ acting by $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ is an isomorphism if and only if G is abelian, i. e., $xy = yx$ for all $x, y \in G$ (this property is called the *commutative law*).

6. There are n spies that spy upon each other, furthermore, each of them watches the only one and is under the watch of one of them. Suppose that the first spy watches the spy who watches the second, the second watches the spy who watches the third, and so on, finally, the n-th spy watches the spy who watches the first one. Determine n for which this is possible, and if so, find out who watches whom.

1. Пусть G — некоторое непустое множество и $\cdot$ — бинарная алгебраическая операция на G, т.е. для любых $a, b \in G$ элемент $a \cdot b$ лежит в G. Предположим, что в G выполнены следующие утверждения:

   (а) для любых $a, b, c \in G$ справедливо равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (это свойство называется *законом ассоциативности*);

   (б) существует элемент $e \in g$, такой что для любого $a \in G$ справедливо равенство $a \cdot e = a = e \cdot a$;

   (в) для любого $a \in G$ существует $b \in G$, такой что $a \cdot b = e = b \cdot a$.

   Тогда G называется *группой*. Обычно мы будем записывать ab вместо $a \cdot b$ и называть групповую операцию умножением. Кроме того, мы будем использовать символ 1 вместо e в утверждении (б) и a^{-1} вместо b в утверждении (в).

   Для данного $a \in G$ доказать, что отображения $\rho_a : G \to G$ и $\lambda_a : G \to G$, определённые правилами $\rho_a : g \mapsto ga$ и $\lambda_a : g \mapsto ag$ являются биекциями.

   Доказать, что утверждения (б) и (в) эквивалентны утверждению

   - для любых $a, b \in G$ каждое из уравнений $a \cdot x = b$ и $y \cdot a = b$ имеет единственное решение.

2. Для данных $x_1, \ldots, x_n \in G$, где G — группа, доказать, что элемент $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ не зависит от расстановки скобок.

3. Говорят, что группа G *конечная*, если G является конечным множеством. Для конечной группы G доказать, что для любого $x \in G$ существует положительное целое число n, такое что $x^n = xx \ldots x = e$ (минимальное число n с этим условием называется *порядком* элемента x и обозначается через $o(x)$ или $|x|$).

4. Подмножество H группы G называется *подгруппой*, если

   - H замкнуто относительно умножения, т. е. $h_1 h_2 \in H$ для любых $h_1, h_2 \in H$;
   - H является группой относительно умножения в G.

   Доказать, что в конечной группе G подмножество H группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда H замкнуто относительно умножения.

5. Пусть G, H — группы. Отображение $\varphi : G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если φ сохраняет операцию, т. е. для любых $x, y \in G$ справедливо равенство $(xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$. Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Доказать, что отображение $\varphi : G \to G$, действующее по правилу $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда группа G абелева, т. е. $xy = yx$ для всех $x, y \in G$ (это свойство называется *законом коммутативности*).

6. Имеется n шпионов, которые шпионят друг за другом, причем каждый следит только за одним и сам находится под наблюдением лишь одного из них. Предположим, что первый шпион следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим и так далее, наконец, n-ый следит за тем, кто следит за первым. Найдите n, при которых это возможно, и если так, выясните, кто за кем следит.