1. Пусть $G = \langle g \rangle$, где g — элемент порядка $p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, ($p_1, \dots, p_s$ — различные простые числа, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \geq 1$).
   а) Найти максимальные подгруппы группы G.
   б) Найти $\Phi(G)$.

2. Доказать, что
   а) $S_n = \langle (ij) \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$;
   б) $S_n = \langle (1i) \mid 2 \leq i \leq n \rangle$;
   в) $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$.

3. Пусть a и b — инволюции (т. е. элементы порядка 2 некоторой группы). Доказать, что
   а) $|\langle a, b \rangle : \langle ab \rangle| = 2$;
   б) любой элемент из $\langle a, b \rangle \setminus \langle ab \rangle$ является инволюцией;
   в) если $x \in \langle a, b \rangle \setminus \langle ab \rangle$ и $y \in \langle ab \rangle$, то $x^{-1}yx = xyx = y^{-1}$.

4. Пусть конечная группа G содержит нееденичные элементы x и y такие, что $x^{-1}yx = y^{-1}$. Показать, что порядок группы G четен.

5. Известная игра «15» представляет собой пятнадцать плоских квадратных фишек одинакового размера, пронумерованных числами от 1 до 15. Фишки расположены на квадратной доске, разделенной на 16 полей того же размера, что и фишки. Остается свободным одно поле. За один ход можно, не снимая с доски, передвинуть на это поле соседнюю ним (по горизонтали или по вертикали) фишку. В «правильном» расположении фишки размещены следующим образом:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

   Фишки убрали с доски, а затем расположили в произвольном порядке так, что нижнее правое поле осталось свободным:

i_1	i_2	i_3	i_4
i_5	i_6	i_7	i_8
i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}
i_{13}	i_{14}	i_{15}	

   Показать, что от такого расположения можно перейти к «правильному» тогда и только тогда, когда подстановка

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 15 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{15} \end{pmatrix}$$

   является четной.