

Теорема Брауэра.

1. Пусть G — группа диэдра порядка $2n$ (см. задачу 3 с семинара 3), где n — нечётное число. Доказать, что все инволюции группы G сопряжены. Верно ли это утверждение для чётного n ?
2. Пусть G — конечная группа и $x \in G$ — произвольный элемент. Обозначим через $C_G(x) = \{g \in G \mid x^g = x\}$ — централизатор элемента x в группе G , а через $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ — класс сопряжённости элемента x в группе G . Доказать, что

$$|C_G(x)| \cdot |x^G| = |G|.$$

3. Пусть s, t — две инволюции конечной группы G . Доказать, что либо s и t сопряжены в G , либо существует инволюция $z \in G$, коммутирующая с s и t .
4. Определим граф Γ для группы G следующим образом: вершины этого графа являются инволюциями группы G и две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие им инволюции коммутируют. Доказать, что расстояние между двумя несопряжёнными инволюциями в графе Γ не превосходит 2.
5. Обозначим через c максимум порядков централизаторов инволюций в группе G . Доказать, что если группа G содержит две несопряжённые инволюции, то $|G| < c^3$.