Рассмотрим множество Ω состояний *куба* 2×2, состоящего из 8 *кубиков*, каждый из которых имеет 3 видимые грани. Обозначим грани куба: U — верхняя (up), D — нижняя (down), F — передняя (front), B — задняя (back), R — правая (right), L — левая (left). Занумеруем положения кубиков (не учитывая ориентацию) в следующем порядке: цифрами 1–4 кубики фронтальной грани по часовой стрелке, начиная с левого верхнего, и цифрами 5–8 кубики задней грани, так что кубик с номером $i+4$ имеет общую грань с кубиком i при $i = 1, \ldots, 4$. Зададим ориентацию каждого кубика следующим образом. Назовем цвета верхней и нижней грани *определяющими* (*ориентацию*). Ясно, что каждый из 8 кубиков имеет ровно одну грань определяющего цвета. Назовем ориентацию кубика *правильной*, если его грань определяющего цвета лежит либо в верхней, либо в нижней грани куба. Будем обозначать правильную ориентацию кубика цифрой 0, точнее элементом 0 из аддитивной группы кольца вычетов $\mathbb{Z}_3$ по модулю 3, ориентацию полученную из правильной поворотом на угол 120° по часовой стрелке — цифрой 1, а на угол 240° — цифрой 2. Таким образом, любое состояние куба, т. е. элемент множества Ω, однозначно описывается парой (σ, α), где σ — подстановка из симметрической группы $\Sigma = S_8$, а α — упорядоченная 8-ка элементов из $\mathbb{Z}_3$, множество всех таких 8-ок обозначим через Δ.

Рассмотрим теперь группу G куба 2×2, порожденную поворотами на угол 90° по часовой стрелке каждой из шести граней куба. Шесть указанных поворотов мы обозначим теми же латинским буквами, что и соответствующие грани. Группа G действует на множестве Ω точно, поэтому каждый элемент x группы G отождествляется с состоянием куба, полученным из начального состояния с помощью элемента x. Иными словами, если $(\varepsilon, (0,0,0,0,0,0,0,0))x = (\sigma, \alpha)$, то $x = (\sigma, \alpha)$.

1. Обозначим через N множество всех элементов группы G, вида $x = (\varepsilon, \alpha)$, где ε — тождественная подстановка из Σ, а $\alpha \in \Delta$. Тогда

   а) N — нормальная подгруппа в G;

   б) N — элементарная абелева подгруппа порядка 3^7.

   Указание 1. Покажите, что для любого $x = (\sigma, \alpha) \in G$ выполняется следующее свойство: если $\alpha = (i_1, \ldots, i_8)$, то $i_1 + \ldots + i_8 = 0(\mod 3)$.

   Указание 2. Постройте (т. е. запишите в виде произведения порождающих элементов) элемент группы G, равный $(\varepsilon, (1,2,0,0,0,0,0,0))$.

2. Докажите, что факторгруппа G/N изоморфна S_8 и, значит, $|G| = 3^7 \cdot 8!$

   Указание. Постройте элемент группы G вида $((1,2), \alpha)$.

3. Покажите, что группа N дополняема в G, т. е. существует подгруппа H в G такая, что группа $G = N \rtimes H$ есть полупрямое произведение групп N и H.

4. Пусть S — сплетение группы A порядка 3 с помощью группы B, изоморфной S_8. Докажите, что центр $Z(S)$ этой группы имеет порядок 3 и группа G изоморфна факторгруппе $S/Z(S)$.

5. Найдите множество $\omega(G)$ порядков элементов группы G. Постройте элемент порядка 7 и элемент порядка 9.