ГЛАВА V

АЛГЕБРА ПОЛИНОМОВ

§ 1. Элементарные действия над полиномами. Простые и кратные корни

546. Выполнить деление с остатком:

a) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ на x^2-3x+1;
b) x^5-3x^2-x-1 на $3x^2-2x+1$.

547. При каком условии полином x^3+px+q делится на полином вида x^2+mx-1?

548. При каком условии полином x^4+px^2+q делится на полином x^2+mx+1?

549. Выполнить деление с остатком:

a) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$;
b) $2x^5-5x^3-8x$ на $x+3$;
c) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$;
d) x^3-x^2-x на $x-1+2i$.

550. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$:

a) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $x_0=4$;
b) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0=-2-i$.

551. Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

a) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=-1$;
b) $f(x)=x^5$, $x_0=1$;
c) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $x_0=2$;
d) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$;
e) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-(33-20i)x+7+18i$, $x_0=-1+2i$.

552. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

a) $\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$; b) $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$.

***553.** Посредством схемы Горнера разложить по степеням x:

a) $f(x+3)$, где $f(x)=x^4-x^3+1$;
b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$.

554. Найти значения полинома $f(x)$ и его производных при $x=x_0$:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$, $x_0=2$;
b) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1$, $x_0=1+2i$.

555. Чему равен показатель кратности корня:

a) 2 для полинома $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;
b) -2 для полинома $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

556. Определить коэффициент a так, чтобы полином x^5-ax^2-ax+1 имел -1 корнем не ниже второй кратности.

557. Определить A и B так, чтобы трехчлен Ax^4+Bx^3+1 делился на $(x-1)^2$.

558. Определить A и B так, чтобы трехчлен $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ делился на $(x-1)^2$.

559. Доказать, что полиномы:

a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$;
b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$;
c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$

имеют число 1 тройным корнем.

560. Доказать, что полином

$$x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}-1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

***561.** Доказать, что для того чтобы полином

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$