делился на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} a_0+a_1+\ a_2+\ \dots +\ \ a_n&=0,\\ a_1+2a_2+\ \dots +n\,a_n&=0,\\ a_1+4a_2+\ \dots +n^2a_n&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ a_1+2^ka_2+\ \dots +n^ka_n&=0. \end{aligned}$$

562. Определить показатель кратности корня a полинома

$$\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a),$$

где $f(x)$ — полином.

563. Найти условие, при котором полином x^5+ax^3+b имеет двойной корень, отличный от нуля.

564. Найти условие, при котором полином x^5+10ax^3+ $+5bx+c$ имеет тройной корень, отличный от нуля.

565. Доказать, что трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

566. Найти условие, при котором трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ имеет двойной корень, отличный от нуля.

*567. Доказать, что k-членный полином

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\dots+a_kx^{p_k}$$

не имеет корней выше $(k-1)$-й кратности, отличных от нуля.

*568. Доказать, что каждый отличный от нуля корень $(k-1)$-й кратности полинома $a_1x^{m_1}+a_2x^{m_2}+\dots$ $\dots+a_kx^{m_k}$ удовлетворяет уравнениям $a_1x^{m_1}\varphi'(m_1)=$ $=a_2x^{m_2}\varphi'(m_2)=\dots=a_kx^{m_k}\varphi'(m_k)$, где $\varphi(t)=(t-m_1)\times$ $\times(t-m_2)\dots(t-m_k)$.

*569. Доказать, что полином делится на свою производную в том и только в том случае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

570. Доказать, что полином

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

571. Доказать, что для того чтобы x_0 было корнем кратности k числителя дробной рациональной функции

$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\omega(x)}$, знаменатель которой $\omega(x)$ не обращается в 0 при $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{k}(x_0)\neq 0.$$

572. Доказать, что дробная рациональная функция $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\omega(x)}$ может быть представлена в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\dots$$
$$\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{\omega(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

где $F(x)$ — полином. Предполагается, что $\omega(x_0)\neq 0$ (формула Тейлора для дробной рациональной функции).

*573. Доказать, что если x_0 есть корень кратности k для полинома $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)$, то x_0 будет корнем кратности $k+1$ для полинома $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$, если этот последний не равен нулю тождественно, и обратно.

*574. Доказать, что если $f(x)$ не имеет кратных корней, то $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ не имеет корней кратности выше $n-1$, где n — степень $f(x)$.

*575. Построить полином $f(x)$ степени n, для которого $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ имеет корень x_0 кратности $n-1$, не являющийся корнем $f(x)$.

*576. Пусть $f(z)$ — полином с комплексными коэффициентами и $f(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — полиномы с вещественными коэффициентами. Выразить все решения (вещественные и комплексные) системы уравнений $u(x,y)=0$, $v(x,y)=0$ через корни $f(z)$.

§ 2. Наибольший общий делитель полиномов

577. Определить наибольший общий делитель полиномов:

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ и x^3+x^2-x-1;
b) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ и $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;
c) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ и $3x^5-7x^3+3x^2-7$;
d) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ и $3x^4-6x^3+5x^2+$ $+2x-2$;
e) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ и x^5+x^2-x+1;