$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\ldots(x^2+n^2)}$.

627. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\frac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

628. Пусть $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

a) $\sum\frac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\frac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\frac{1}{(x-x_i)^2}$.

***629.** Вычислить следующие суммы, зная, что $x_1, x_2, \ldots$ суть корни полинома $\varphi(x)$:

a) $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\frac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\frac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\frac{1}{x_3^2-3x_3+2}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\frac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\frac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\frac{1}{x_3^2-2x_3+1}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

630. Разложить $\frac{1}{x^p-x}$ на простейшие дроби над полем GF (p).

§ 5. Интерполяция

631. Пользуясь способом Ньютона, построить полином наименьшей степени по данной таблице значений:

a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

; b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

;

c)

x	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

, найти $f(2)$; d)

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

.

632. Построить полином по заданной таблице значений, пользуясь формулой Лагранжа:

a)

x	1	2	3	4
y	2	1	4	3

; b)

x	1	i	-1	$-i$
y	1	2	3	4

.

***633.** Найти $f(x)$ по таблице значений:

x	1	ε_1	ε_2	$\ldots$	ε_{n-1}
$f(x)$	1	2	3	$\ldots$	n

, $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$.

634. Полином $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в корнях n-й степени из 1. Найти $f(0)$.

***635.** Доказать теорему: для того чтобы

$$f(x_0)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$$

для любого полинома $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были расположены на окружности с центром в x_0 и делили ее на равные части.

***636.** Доказать, что если корни

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

полинома $\varphi(x)$ все различны, то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant s\leqslant n-2.$$

637. Найти сумму $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (обозначения такие же, как и в задаче 636).

638. Вывести интерполяционную формулу Лагранжа посредством решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_0+a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1,\\
&a_0+a_1x_2+\ldots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0+a_1x_n+\ldots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n.
\end{aligned}$$